



Παράγωγοι ΚΑΤΕ



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση

389 ασκήσεις και τεχνικές
σε 63 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



kglykos.gr

Τα πάντα είναι
παράνωνοι

Συνέχεια συναρτήσεων

Η f είναι συνεχής στο x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Συνέχεια σε συναρτησιακή σχέση $f(x+y)$: θέτω $x - x_0 = h - a$ όπου f συνεχής στο a , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f((x_0 - a) + h) = \dots$

Συνέχεια σε συναρτησιακή σχέση $f(xy)$: θέτω $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{a}$ όπου η f

συνεχής στο a , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f\left(\frac{x_0}{a} h\right) = \dots$

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Σχόλια

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

β) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση.

γ) — Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

— Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\eta x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

— Οι συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ είναι συνεχείς.

21. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων.

Απάντηση

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f+g$, $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

22. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης.

Απάντηση

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

23. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Να μελετήσεις τη συνέχεια των συναρτήσεων

2072.
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \eta\mu x} - 1, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{2x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R} - \{0\}$

2073.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$



$$\mathbb{R} - \{2\}$$

$$2074. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{R}$$

$$2075. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{R}_-$$

$$2076. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x - 2| + 4 - x^2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{R} - \{2\}$$

2077. Να βρεις το a, b ώστε να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} - a^2, & x \leq 3 \\ ax + 5, & x > 3 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{b}{x}, & x \leq -1 \\ x^2 + 2bx, & x > -1 \end{cases}$$

$$a = -1, b = 1$$

$$2078. \quad \text{Αν είναι συνεχής η } f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + b, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2ax^2 + bx + 5, & x > 1 \end{cases}, \text{ να βρεις τα } a, b$$

$$a = -4, b = 5$$

$$2079. \quad \text{Να βρεις τα } a, b \text{ ώστε να είναι συνεχής η } f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < -1 \\ x^2 + x + b, & x > 1 \\ x + a, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$a = 1, b = 0$$

$$2080. \quad \text{Να βρεις τα } a, b \text{ ώστε να είναι συνεχής η } f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + x + b}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

$$a = 2, b = -3$$



2081. Να βρεις τα α, β ώστε $f(x) = \begin{cases} 7x+1, & x \leq 1 \\ \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$ να έχει όριο στο 1

$$a=2, b=-3$$

2082. Αν $f(x) = \begin{cases} ax-3, & x \leq 1 \\ x^2-1, & 1 < x < 3 \\ bx-2, & x \geq 3 \end{cases}$ να βρεις τα α, β ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$a=3, b=\frac{10}{3}$$

2083. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2084. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής όπου διέρχεται από το $A(1, -1)$, να βρεις τα α, β αν

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+ax+b, & x < 2 \\ 5ax+2b, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$a=\frac{11}{7}, b=-\frac{32}{7}$$

2085. Αν $f(x) = x^2 + 2x, x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f^{-1}(x) =$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1, x \in (-1, +\infty)$$

2086. Να βρεις τα α, β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής και να διέρχεται από $A(0, 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 3b, & x < 1 \\ \frac{x^2 + bx + a}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$a=\frac{6}{5}, b=1$$

2087. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $xf(x) = \eta\mu x + x \Rightarrow f(0) =$

$$2$$

2088. Να βρεις τη συνεχή συνάρτηση όπου : $(x-2)f(x) - 10 = x^2 - 7x$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{x-2}, & x \neq 2 \\ -3, & x = 2 \end{cases}$$

2089. Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $\left| x^2 f(x) - x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^{2022} \Rightarrow f(0) =$



2090. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο 0 ,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x+y) = f(x)f(y), \text{ ν.δ.ο. είναι συνεχής στο } \mathbb{R}$$

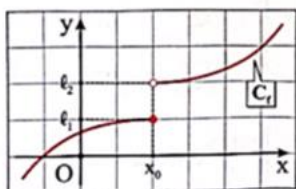
2091. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + 2f(y) + xy$,
συνεχής στο 0 , ν.δ.ο. είναι συνεχής $\mathbb{R}$

2092. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(xy) = f(x) + f(y)$, συνεχής
στο 1 ν.δ.ο. συνεχής στο $\mathbb{R}$

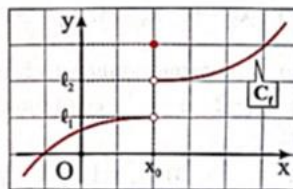


2093. Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και στη συνέχεια να το συγκρίνετε με την τιμή $f(x_0)$. Σε ποιες περιπτώσεις η f είναι συνεχής στο x_0 ;

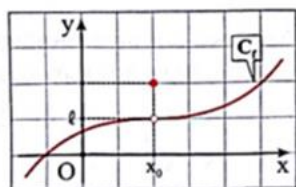
α)



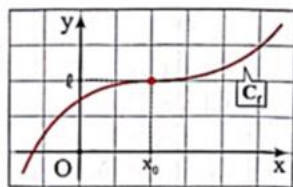
β)



γ)

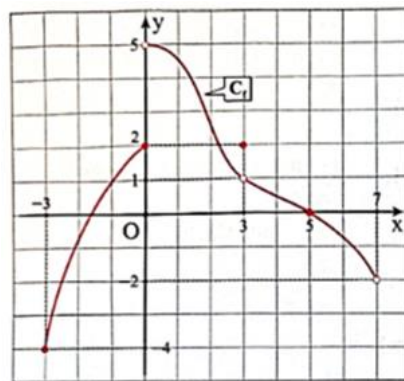


δ)



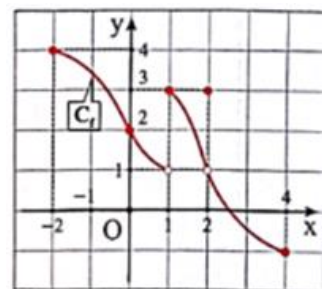
2094. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-3, 7)$ και έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:

- Να συμπληρώσετε τα κενά: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \dots$, $f(-3) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots$, $f(0) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots$, $f(3) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots$, $f(5) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \dots$
- Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στα σημεία: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = 7$



2095. Στο παρακάτω σχήμα να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 , όπου:

- $x_0 = -2$
- $x_0 = 1$
- $x_0 = 2$
- $x_0 = 4$
- $x_0 = 0$



2096. Να μελετήσετε τη συνέχεια στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:



- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 4} - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$
- $f(x) = \begin{cases} |x + 3| + 1, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{αν } x > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x^3 + x^2 + 3, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

2097.

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + 3x - 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ \sqrt{x+2} - 1, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-3|-2}{x+1}, & \text{αν } x < -1 \\ 2, & \text{αν } x = -1 \\ \frac{1-x^2}{x+1}, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 5x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 3, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

2098.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^4 + x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$
- $|f(x) - x| \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$
- $(f(x) - 1)^2 \leq \eta\mu^2 x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$
- $f^2(x) + 1 \leq x^2 + 2f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$

2099.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $|\eta\mu x| \leq f(x) \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $x^2 - 1 \leq f(x) - 2 \leq x^4 - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 1$
- $|f(x) - 2x + 3| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $f^2(x) + 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$

2100.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$
- $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)\sin \frac{2}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

2101.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 στις επόμενες περιπτώσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3, \quad f(1) = 2, \quad x_0 = 1$



- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x} = 1, \quad f(0) = 1, \quad x_0 = 0$

2102. Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + f(x)}{x-1} = -2$ και $f(1) = -2$
- η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, όταν: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) + x^2 - 2}{x-3} = 5$ και $g(3) = -4$

2103. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα αντίστοιχα όρια.

- $f(x) = \ln(x^2 + e), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $f(x) = e^{x^2-9} + 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $f(x) = \eta\mu(\ln(\sin x)), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2104. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής.

- $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 3, & \text{αν } x \geq 1 \\ 2x - 1, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + x + \alpha, & \text{αν } x > 0 \\ 2x - 3, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$

2105. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

- $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2\eta\mu^2 x}{x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ x + \alpha, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

2106. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 4, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x + 6}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ -5, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 1, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

2107. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:



- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+ax+\beta}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1, \\ 2\alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x-6}{x-\alpha}, & \text{αν } x \neq \alpha, \\ \beta, & \text{αν } x = \alpha \end{cases}, \quad x_0 = \alpha$

2108. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2+3\beta x-5}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 7, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-\alpha x+\beta-1}{x-3}, & \text{αν } x < 3 \\ x^2 - (\alpha - 1)x + \beta, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)x^2-(2\beta+1)x+6}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 7, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\eta\mu 3x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

2109. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις f, g, h, φ να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x, & \text{αν } 1 < x \leq 2 \\ \beta x^2 - \alpha, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} \alpha x - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - \beta x - \alpha, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 2e^{x-1} - \alpha x + \beta + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
- $h(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2+3}-\alpha}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \beta, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1}{x^2-2x+1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

2110. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ f(0), & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

2111. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ f(1), & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε την τιμή

$f(1)$.

2112. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) = x^2 + 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$



- Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

2113. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Να βρείτε την τιμή $f(0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $xf(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)+\eta\mu x}{x^2+2x} = 1$

2114. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$x + \eta\mu x \leq xf(x) \leq x^2 + x + \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

2115. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Να βρείτε την τιμή $f(1)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $(x-1)f(x) \leq x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $xf(x) \leq \sqrt{x^2+3} + f(x) - 2, \quad x \in \mathbb{R}$
- $xf(x) + 4x \leq 3 + x^2 + f(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) + 3x^2 + 2x \leq 1 + 4xf(x), \quad x \in \mathbb{R}$

2116. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , να βρείτε την τιμή $f(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $xf(x) \leq \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $(x-1)f(x) \leq x^2 + 3x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 1$
- $x^3 f(x) \leq (\sqrt{x^2+4} - 2)\eta\mu 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $(x-\alpha)f(x) \geq x^2 + \alpha x - 2\alpha^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = \alpha$

2117. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , να βρείτε την τιμή $f(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x - \eta\mu^2 x \leq xf(x) \leq x + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $x - 2 \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 2$

2118. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x-1)f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x - 3, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$
- Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .

2119. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^3 f(x) = (\sqrt{x^2+1} - 1)\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$



- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
- Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .

2120. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο $x_0 = 0$. Να βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $xf(x) = x + \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $xf(x) = \sin x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $xf(x) + 1 = \sqrt{1 + \eta\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}$

2121. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x(f(x) - x) + \eta\mu x(f(x) + 1) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
- Να βρείτε τον τύπο της f .

2122. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Να βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $1 + (x^2 + 1)f(x) = (1 + f(x))\sin^2 x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) + \sqrt{x^2 + x + 2} = 1 + x(f(x) + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2123. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x^2}{x} \sin \frac{1}{x} + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{|x^3 - x - 2| - 2}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
- Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) - 2f(-x))$

2124. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\eta\mu x} = 2 \quad \text{και} \quad xf(x) = x + 3\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε την τιμή $f(0)$.



- Να αποδείξετε ότι $f(x) < 4$ για κάθε $x > 0$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sin x}{f(x) - 4}$
- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και να υπολογίσετε το όριο: $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2125. Δίνεται η περιττή συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + x^2 - x - 2}{x - 3} = 5$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, τότε:

- να βρείτε την τιμή $f(3)$,
- να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_1 = -3$,
- να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x)}{x - 3}$.

2126. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) = \sin x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

2127. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2$

- Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(2x^2 + 3x - 14)] = 11$.
- Να βρείτε την τιμή $f(2)$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x^2 - 4x + 4)g(x)}$
- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $h(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & \text{αν } x \neq 2 \\ \alpha + 1, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2) + 4\eta\mu(x - 2)}{x^2 - 4}$



2128. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-2}{h} = 4$

- Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 4$

- Να αποδείξετε ότι $f(2) = 2$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x)-4}{x-2}$ και $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

2129. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

- Να βρείτε τον τύπο της f .

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$,

- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} (x + \sin x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) x^2 + 2 \right)$

2130. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + 2f(x) = x$

Να αποδείξετε ότι:

- η f αντιστρέφεται,

- η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,

- $f^{-1}(x) = x^3 + 2x$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.



Bolzano

24. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία..

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν:

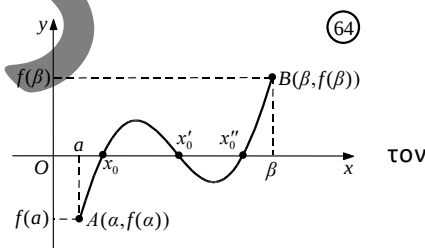
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, 0)$, με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



Σχόλια

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα

A3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν:

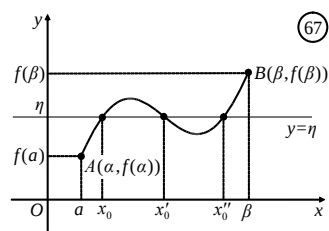
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η , μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $y=\eta$, τότε η C_f τέμνει την ευθεία $y=\eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, \eta)$, με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



Απόδειξη

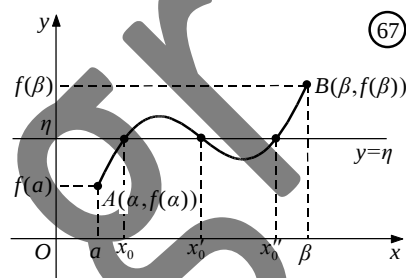
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

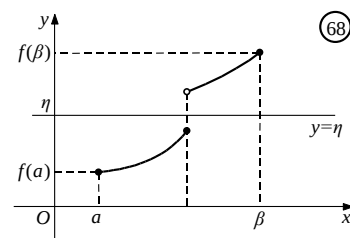


Σχόλια

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.



Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

25. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Σχόλιο



Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

2131. Ν.δ.ο. η παρακάτω εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα : $x^4 + 8x^3 - x^2 + x - 3 = 0, x \in (0, 1)$

2132. Ν.δ.ο. η παρακάτω εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα : $5x + 1 - 2\sin x = 0, x \in (0, \pi)$

2133. Ν.δ.ο. η παρακάτω εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα :

$$\frac{x^{10} + 1}{x - 2} + \frac{x^{20} + 1}{x + 2} = 0, x \in (-2, 2)$$

2134. Ν.δ.ο. οι γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5, g(x) = x^2 + 3x - 1 \text{ τέμνονται}$$

σε ένα τουλάχιστον σημείο στο $(1, 2)$

2135. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $x + 2 \leq f(x) \leq e^{x+2}$. Ν.δ.ο.

η εξίσωση $f(x) = e^3 x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$

2136. Δίνεται συνεχής συνάρτηση

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = 2022b^2, f(b) = 2022a^2, \text{ ν.δ.ο. υπάρχει}$$

τουλάχιστον ένα $\xi \in [a, b] : f(\xi) = 2022\xi^2$

2137. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[2, 3]$ ν.δ.ο. υπάρχει

$$\text{τουλάχιστον ένα } x \in (2, 3) : f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

2138. Δίνεται συνάρτηση συνεχής $f : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (0, 2) : f^2(\xi) = f(\xi) - \xi$$

2139. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$. Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (a, b) : 10f(\xi) = (10 - k)f(a) + kf(b), k \in (0, 10)$$

2140. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2]$ ώστε

$$f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$$

2141. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε

$$f(\eta\mu\xi) = \eta\mu\xi$$

Bolzano: έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$

- Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο x_0 στο (α, β) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Ν.δ.ο. η συνάρτηση έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο (α, β) : κάνε Bolzano στη συνάρτηση που δίνεται.

Ν.δ.ο. η εξίσωση έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο (α, β) : κάνε Bolzano στη συνάρτηση που θα δημιουργήσεις από την εξίσωση αν τα φέρεις όλα στο πρώτο μέλος.

Το νου σου : Αν δεν υπάρχει διάστημα δημιουργήσε το μόνος σου. Θα μπορούσε να είναι και το $\pm\infty$. Αν δε φαίνεται το πρόσημο στα $f(\alpha), f(\beta)$ τότε δείξε ότι $f(\alpha)f(\beta) < 0$.



2142. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = f(5)$, ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in [1, 3]$ ώστε $f(\xi) = f(\xi + 2)$
2143. Δίνονται $f, g: f(x) = (x^2 - 5x + 6)g(x)$, $\forall x \in [2, 3]$. Αν οι αριθμοί 2,3 είναι διαδοχικές ρίζες της f , ν.δ.ο. $g(2)g(3) \geq 0$
2144. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(k) + g(m) + g(n) = 0$, $k \neq m \neq n$, $g(x) \neq 0$, ν.δ.ο. είναι ασυνεχής
2145. Αν οι συνεχείς $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f \uparrow, g \downarrow \Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$: $f \circ g(\xi) = g \circ f(\xi) + 2\xi^2 - 1$
2146. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $e^{-a} f(a) + e^{-b} f(b) = 0$, ν.δ.ο. $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a, b]$
2147. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [a, a+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f^2(a) + f(a)f(a+1) = 0$. Ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a, a+1]$.
2148. Ν.δ.ο. η εξίσωση $x - b^2 \eta \mu x = b^2$, $b \neq 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει το $2b^2$
2149. Ν.δ.ο. η εξίσωση $x^6 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1, 1)$
2150. Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{16} - \eta \mu \pi x + 7$, ν.δ.ο. η συνάρτηση παίρνει την τιμή $7/2$ όταν $x \in (-4, 4)$
2151. Ν.δ.ο. η εξίσωση $x^4 + a^2 x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 1)$
2152. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $ab > 0$. Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$: $x_0 f(x_0) = ab$
2153. Ν.δ.ο. η εξίσωση $(x^2 - 1)2^x = 1$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$
2154. Δίνεται συνεχής $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = f(2)$ Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα a ώστε $f(a) = f(a+1)$
2155. Δίνεται συνεχής $f: [0, \pi] \rightarrow (0, \pi)$. Ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$: $f(x_0) + x_0 \eta \mu x_0 = x_0$
2156. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \downarrow$, συνεχής με $0 < f(1) < 1$. Ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$: $f(\ln x_0) = \ln x_0$
2157. Δίνεται συνεχής $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a^2 f(a) + b^2 f(b) = -f(a) - f(b)$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα για την εξίσωση $f(x) = 0$



2158. Ν.δ.ο. η εξίσωση $\frac{x^{2010}+1}{x} = \frac{x^{2012}+2}{1-x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$

2159. Έστω $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $f(a) \neq f(b)$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a,b): 3f(x_0) = f(a) + 2f(b)$

2160. Έστω συνεχής $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$, ν.δ.ο. $\exists x_0 \in (0,1): f(x_0) = x_0^v$

2161. Έστω συνεχείς $f, g:[0,1] \rightarrow [0,1]$. Ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (0,1): f^2(\xi) + g^2(\xi) = 2\xi^2$$

2162. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$, $x^3 + 2xf^3(x) = 8$. Ν.δ.ο η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,0)$

2163. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ και ισχύει

$$f(1) + f(2) = 8, f(1) \neq 2. \text{ Ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (1,2) \text{ ώστε } f(\xi) = \xi + \xi^2$$

2164. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-2,2]$.

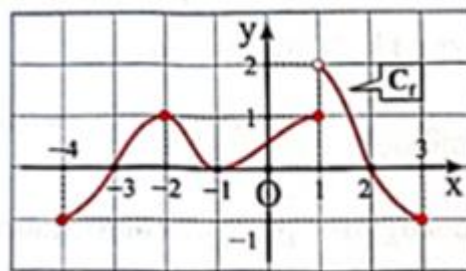
- Να βρεις τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Ν.δ.ο. η f διατηρεί το ίδιο πρόσημο στο διάστημα $(-2,2)$.
- Ποια μπορεί να είναι η $f(x)$.
- Ποιο μπορεί να είναι το σχήμα

2165. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής για την οποία: $(f(x)-1)(f(x)-3) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο. η f είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της.

2166. Ν.δ.ο. η εξίσωση $\frac{x^{20}+1}{x-2} + \frac{x^8+3}{x-3} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,3)$

2167. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



τιμών

- Να γράψετε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο $f(A)$ της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.



- Να εξετάσετε σε ποια από τα διαστήματα: $\Delta_1 = [-4, -2]$, $\Delta_2 = [-2, 1]$ και $\Delta_3 = [1, 3]$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Υπάρχει διάστημα στο πεδίο ορισμού της f , στο οποίο να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano χωρίς να ισχύουν οι προϋποθέσεις του;

2168. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^{2020} + x^{1010} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2169. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ .

- $x^3 + x - 1 = 0$, $\Delta = (0, 1)$
- $x^5 + 2x + 1 = 0$, $\Delta = (-1, 0)$
- $x^4 + 2x = 4$, $\Delta = (-2, 0)$
- $x^3 = x + 2$, $\Delta = (-1, 2)$

2170. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στα διαστήματα που αναφέρονται.

- $(x - 1)^3(x + 3) + (x + 2)^2(x - 3) = 0$, $x_0 \in (1, 3)$
- $(x - \pi) \cdot \eta\mu x = (2x - \pi) \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
- $(x - 2)(x^{10} + 1) + (x - 1)(x^8 + 3) = 0$, $x_0 \in (1, 2)$
- $(3x - \pi) \cdot \epsilon\phi x + (4x - \pi) \cdot \sigma\phi x = 0$, $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$
- $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = x$, $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2171. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ .

- $\eta\mu x = x - 1$, $\Delta = (0, \pi)$
- $(x - 2)e^x + (x - 1)\ln x = 0$, $\Delta = (1, 2)$

2172. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

2173. $f(x) = (x^2 - 4)f^4(x) + 1 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

2174. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x - 2)(x^6 + 1) + (x - 1)(x^8 + 1)$ Να αποδείξετε ότι:

- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$,
- υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{x_0^6 + 1}{x_0 - 1} + \frac{x_0^8 + 1}{x_0 - 2} = 0$.

2175. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{x^7 + 1}{x - 1} + \frac{x^9 + 1}{x - 2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

2176. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{e^x - 1}{x - 1} + \frac{\ln x}{x - 2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

2177. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

- $\frac{\eta\mu x}{2x - \pi} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2x + \pi}$



- $\frac{x^{2006+2006}}{x-1} + \frac{x^{2007+2007}}{x-2} = 0$ έχουν από μία τουλάχιστον ρίζα στα διαστήματα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $(1,2)$ αντίστοιχα.

2178. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^8 + 4x^6 - 3$. Να αποδείξετε ότι:

- για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$,
- η $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

2179. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

2180. Αν $\alpha > 0$ και $\alpha + \beta + 1 < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 + \alpha = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

2181. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στα διαστήματα:

- $\Delta_1 = (-\pi, \pi)$
- $\Delta_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2182. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις έχουν δύο τουλάχιστον ρίζες στα διαστήματα που αναφέρονται.

- $2(x - \alpha)(x - \beta) + 4(x - \beta)(x - \gamma) + 5(x - \alpha)(x - \gamma) = 0$ στο διάστημα (α, γ) με $\alpha < \beta < \gamma$
- $3\sigma\upsilon\nu x = x + 2$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2183. Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{1}{x-\alpha} + \frac{3}{x-\beta} + \frac{5}{x-\gamma} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

2184. Έστω: $f(x) = x^5 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
- η εξίσωση $x^5 + 3x = 1$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

2185. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^9 + x^7 - 1$ Να αποδείξετε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $x_0^9 + x_0^7 = 1$
- η εξίσωση $x^7 = \frac{1}{x^2+1}$ έχει μοναδική λύση.

2186. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $e^x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

2187. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική θετική ρίζα $x_0 \in (1, e)$.

2188. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση: $g(x) = f(x) + x^3 - 1$ είναι γνησίως αύξουσα,



- υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 1 - x_0^3$.

2189. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x = x^2 - 2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Να επιβεβαιώσετε το παραπάνω συμπέρασμα με τη βοήθεια γραφικής παράστασης.
2190. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις: $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.
2191. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) = \alpha$ και $f(1) = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(\gamma) = \gamma$.
2192. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,5]$, $f(1) = 3$ και $f(5) = 2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία $(\epsilon): y = x - 0$.
2193. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha\beta > 0$, $f(\alpha) = 2\alpha$, $g(\beta) = 2\beta$ και $f(x) < 1 < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(\gamma)g(\gamma) = 2\gamma$.
2194. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις: $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1)$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$. Αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $f(\alpha) = g(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)g(\gamma) = \gamma$.
2195. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda \in (0,1)$ και οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν είναι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = \alpha$ και $g(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\lambda f(\xi) + (1 - \lambda)g(\xi) = \xi$.
2196. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)(f(x) - 2) = -2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
2197. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$.
2198. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$ με $\gamma \neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .
2199. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f^2(\alpha) + f(\alpha)f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε: $f(\gamma) = 0$.
2200. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi^v$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$.
2201. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και ισχύει $\alpha\beta > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f(\xi)}{\alpha} = \frac{\beta}{\xi}$.



- 2202.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,3]$ με: $0 < f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0,3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0,3]$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0) = 3f(x_0) - x_0$.
- 2203.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0,4]$, με $f(0) = f(4)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) - f(x+2)$, με $x \in [0,2]$. Να αποδείξετε ότι:
- η h είναι συνεχής συνάρτηση,
 - η εξίσωση $f(x) = f(x+2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$.
 - Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in [0,2]$ τέτοια, ώστε: $\beta - \alpha = 1$ και $f(\beta) - f(\alpha) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$
- 2204.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με: $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
- 2205.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με: $xf(x) + 3\ln x = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική λύση.
- 2206.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x = 1$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.
- 2207.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = 2024x^{2023} + 2023x^{2022} + \dots + 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- 2208.** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- $x^4 + 2x = 4$
 - $x^5 - 3x^3 + 2x^2 = 1$
 - $e^x + x^3 + x - 2 = 0$
 - $\ln x + x^3 + x + 2 = 0$



Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

ΘΕΤ : αν μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, \beta]$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a), f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστο x_0 στο (a, β) τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$

Θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης : μία συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$ έχει κάποια μέγιστη και κάποια ελάχιστη τιμή.

Εφαρμογή του ΘΜΕΤ : σε ασκήσεις που θέλουμε ν.δ.ο. η f λαμβάνει μία τιμή κ ή θέλουμε ν.δ.ο. $f(x_0) = \frac{v_1 f(x_1) + \dots + v_k f(x_k)}{v_1 + \dots + v_k}$

2209. Έστω συνάρτηση συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$. Ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (a, b)$:

$$f(\xi) = \frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3}$$

2210. Συνάρτηση είναι συνεχής στο $[1, 4]$, ν.δ.ο. υπάρχει

$$\xi \in (1, 4) : f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3) + f(4)}{10}$$



2211. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 3, f(2) = 5$. Αν η εξίσωση $f(x) = 4$ είναι αδύνατη ν.δ.ο. είναι ασυνεχής

2212. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + f\left(\frac{3}{10}\right) + f\left(\frac{4}{10}\right) + f\left(\frac{5}{10}\right)}{5}$$

2213. Έστω $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

- Αν $f(1)f(3) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
- Αν $f(1) = 2$ και $f(3) = 5$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4$.

2214. Έστω $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = -1, f(3) = 4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$.

2215. Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(-1) = -2$ και $f(1) = 2$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 1$ τέμνει τη C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1, 1)$.

2216. Έστω $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(1) = 3, f(4) = 7$. Να αποδείξετε ότι:



- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,4)$ με $f(x_0) = 5$.

2217. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο διάστημα $[1,5]$. Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $x_1 \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_1) = \frac{f(2)+f(3)}{2}$
- υπάρχει $x_2 \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_2) = \frac{f(2)+3f(3)+5f(4)}{9}$

2218. Έστω $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με:

$$f(0) = 7 \quad \text{και} \quad f(5) = 1$$

- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,5)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{10}$$

- γ) Η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει μοναδική ρίζα.

2219. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f(x) - 2)(f(x) - 3) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2220. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f^2(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) + 6 = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^3(x) + 5f(x) = 4f^2(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x)(f(x) - 4) + 4 - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2221. Έστω $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και “1-1” συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(-1) < f(1) < 0 \quad \text{Να αποδείξετε ότι } f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$

2222. Έστω $f: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $0 < f(1) < f(3)$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) > 0, x \in [1,3]$ αν η f είναι γνησίως αύξουσα,
- $f(x) \neq 0, x \in [1,3]$ αν η f είναι “1-1”.

2223. Δίνεται η συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,3]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_1) = \frac{2f(1)+3f(2)}{5}$
- Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,3]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_2 \in [0,3]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_2) = \sqrt{f(1)f(2)}$$

2224. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $2f(x_1) + 3f(x_2) = 5f(\xi)$.

2225. Έστω συνάρτηση f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,3]$.

- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,3]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = \frac{f(1)+2f(2)}{3}$
- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε:



$$f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2)}{3}$$

- 2226.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2(x - 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:
- υπάρχουν δύο θέσεις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ στις οποίες η f παρουσιάζει ελάχιστο,
 - υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο $[x_1, x_2]$.
- 2227.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x^2 - 4x + 4)^2(x^2 - 10x + 25)^4$, $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ στα οποία η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ στο οποίο η f παρουσιάζει μέγιστο στο $[x_1, x_2]$.
- 2228.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\epsilon: y = x - 1$. Να αποδείξετε ότι:
- η εξίσωση $f(x) + 1 = x$ είναι αδύνατη στο διάστημα $[0, 4]$,
 - υπάρχει ένα σημείο $A(x_1, f(x_1))$ της C_f που απέχει από την ευθεία ϵ λιγότερο από ό,τι τα υπόλοιπα κι ένα σημείο $B(x_2, f(x_2))$ το οποίο απέχει περισσότερο από τα υπόλοιπα.
- 2229.** Έστω $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με:
- $$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(3) = 4$$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να βρείτε την εικόνα του διαστήματος $[0, 3]$ μέσω της f .
- 2230.** Έστω $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με:
- $$f(-1) = -2 \quad \text{και} \quad f(4) = -5$$
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 - Να βρείτε το $f([-1, 4])$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = -3$.
- 2231.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 5]$ και $f(1) = 2, f(5) = 7$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 5$.
- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 5]$, τότε:
- να βρείτε το σύνολο τιμών της f ,
 - να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = 3$.
- 2232.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης στις παρακάτω περιπτώσεις:
- $f(x) = x^5 + x^3 + 2$
 - $f(x) = 1 - x^3 - x$
 - $f(x) = x + \eta\mu x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 - $f(x) = \sin x - x$, $x \in [0, \pi]$
 - $f(x) = e^{x-1} + x - 2$
 - $f(x) = \ln(x - 2) + e^x$



2233. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$
- $f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 4$

2234. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = x + \eta\mu x$
- $g(x) = x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x$

2235. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = \ln x + x^2 - x$
- $f(x) = e^{-x} - \ln x - x^2 + x$

2236. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = x^3 + x + 1$
- $f(x) = e^x + x + 2$
- $f(x) = e^x + \ln x + 1$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

2237. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = -x$ έχει μοναδική ρίζα x_0 .
- Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $y = e^x$ και της ευθείας $y = -x$.

2238. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x - 2$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: i) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii) $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + \ln x = 2$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

2239. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Αν ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(1) = -2$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

2240. Σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο:

- $f(x) = e^x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

2241. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία θετική ρίζα x_0 :

- $\ln(e^x - 1) = 2 - x$



$$\bullet \ln(x-1) + e^x = 3 - x$$

2242. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . Δίνεται ακόμη ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-5) = 5$, $f(1) = -1$, $f(6) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Να βρείτε:

x	$-\infty$	-5	1	6	$+\infty$
$f(x)$					

- τις εικόνες των διαστημάτων:
 $\Delta_1 = (-\infty, -5]$, $\Delta_2 = [-5, 1]$
 $\Delta_3 = [1, 6]$ και $\Delta_4 = [6, +\infty)$ μέσω της συνάρτησης f ,
- το σύνολο τιμών της f ,
- το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$,
- το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 6]$.

2243. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$
- $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$
- $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1)$
- $f(\mathbb{R}) = (-3, 2)$

2244. Δίνεται η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία σύνολο τιμών το: $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$ Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 + x}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2}{x + 1}$

2245. Μια βιομηχανία κατασκευής μηχανών έχει καθορίσει την τιμή πώλησης κάθε μηχανής ως εξής: Αν ημερησίως παράγονται μέχρι 10 μηχανές, τότε η τιμή της καθεμίας θα είναι 5 χιλιάδες €, ενώ η τιμή θα μειώνεται κατά 100 € για κάθε επιπλέον μηχανή.

- Να βρείτε τη συνάρτηση f που δίνει την τιμή πώλησης (σε χιλιάδες €) της κάθε μηχανής ως συνάρτηση του αριθμού των παραγόμενων μηχανών.
- Να εξετάσετε αν η παραπάνω συνάρτηση f είναι συνεχής.
- Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τα έσοδα (σε χιλιάδες €) της βιομηχανίας και να εξετάσετε αν αυτή είναι συνεχής.



2246. Ένας ορειβάτης ξεκίνησε μια μέρα στις 7 π.μ. από τους πρόποδες του Ολύμπου και έφτασε στην κορυφή του στις 3 μ.μ. Την άλλη ημέρα ξεκίνησε στις 7 π.μ. και ακολουθώντας την ίδια διαδρομή επέστρεψε μετά από 8 ώρες στο σημείο απ' όπου είχε ξεκινήσει. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής, στο οποίο ο ορειβάτης βρισκόταν την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

2247. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται το τετράγωνο $OAB\Gamma$ όπου O η αρχή των αξόνων, $A(1,0)$ και $\Gamma(0,1)$.

- Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων $OB, A\Gamma$.
- Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τις διαγωνίες $OB, A\Gamma$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

2248. Έστω M τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in [1,2]$ και A, B οι προβολές του σημείου M στους ημιάξονες Ox, Oy αντίστοιχα.

- Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του ορθογωνίου $OAMB$, ως συνάρτηση του x .
- Να βρείτε το εμβαδόν E_2 του τετραγώνου με πλευρά την OM , ως συνάρτηση του x .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο M της γραφικής παράστασης της f , για το οποίο ισχύει: $E_1^2 = E_2$.

2249. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 6$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = 12$ για κάθε $x > 0$.

- Να αποδείξετε ότι $f(6) = 2$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,6)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4$.
- Να υπολογίσετε τα $f(4)$ και $f(5)$.
- Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε τον τύπο της f .

2250. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε την εικόνα του A μέσω της f , όταν: i) $A = [1, e]$ ii) $A = (0, +\infty)$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των συναρτήσεων $y = \ln x$ και $y = -x$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.



2251. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$-\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad f(1) = 2$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 3 < x_2$ και στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο της f .

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

- $f^2(x) - 2f(x) = 0$
- $f^2(x) + f(x) = 0$

2252. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f(x)(f(x) - 2) = e^{2x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - f(0) = 2$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
- Να βρείτε το πρόσημο της g .
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

2253. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$

- Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μία μόνο ρίζα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

2254. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$-f(1) = -5, f(5) = -3, f(3) = 1$$

- Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα και μάλιστα θετική.

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

- $f^3(x) + f(x) = 0$
- $f^2(x) = f(x)$
- iii) $f(x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2255. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$.



- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot f(x)), \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{f(x)}$
- Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{f^{-1}(x)}, \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f^{-1}(x))$

2256. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$ με: $-f(1)f(2)f(4) = 8$ και $-f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,4]$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,4]$,
- η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,4]$,
- η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,4]$.



Ορισμός παραγώγου

Η παράγωγος της f στο x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

, οι τύποι χρησιμοποιούνται εφόσον δε γνωρίζουμε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

26. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με

$$f'(x_0). \text{ Δηλαδή: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Θεώρημα

A4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

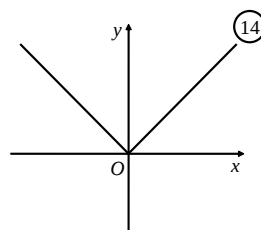
αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

Σχόλιο

α) Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει:

Η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$





β) Ισχύει όμως ότι : Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Ορισμός

28. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται:

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο A

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και

επιπλέον ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

2257. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ 3x-x^2, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(2) = ; , f'(0) = ; , f'(1) = ;$

-1, 3, 0

2258. Αν $f(x) = |x^2 - 4x| \Rightarrow f'(3) = ; , f'(-1) = ; , f'(4) = ;$

-2, -6, 0

2259. $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x < -1 \\ 3x^2 + 6x - 1, & x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(-1) = ;$

2260. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 7\eta\mu x - x^{2017} \leq f(x) \leq 7\eta\mu x + x^{2017} \Rightarrow f'(0) = ;$

7

2261. Δίνονται $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq f(x) + (x-e)^3, f'(e) = 3 \Rightarrow g'(e) = ;$

3

2262. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(1) = g(1) = 0, f(x) + x \leq g(x) + x^2 \Rightarrow f'(1) - g'(1) = 1$

f παραγωγίσιμη
 $\rightarrow f$ συνεχής

f όχι συνεχής $\rightarrow f$
όχι παραγωγίσιμη

fsυνεχής $\rightarrow f$ δεν
γνωρίζω αν είναι
παραγωγίσιμη

f όχι παραγωγίσιμη
 $\rightarrow f$ δεν γνωρίζω
αν είναι συνεχής



2263. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης συνάρτησης στο $A(3, -2)$ σχηματίζει με οριζόντιο άξονα

γωνία 120. Να υπολογίσεις το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)+2}{h}$

$$-\sqrt{3}$$

2264. Δίνεται συνάρτηση $f : f(5+h) = 2 - 2h + 3h^2 \Rightarrow f(5), f'(5) = ;$

2265. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x=0$. Ν.δ.ο. $g(x) = f(|x|)$ παραγωγίσιμη στο 0

$$\Leftrightarrow f'(0) = 0$$

2266. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0) = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{6x} = ;$

$$\frac{1}{3}a$$

2267. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=-2$ με $f'(-2) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(f\left(\frac{1-2x}{x}\right) - f(-2) \right) \right] = ;$

$$0$$

2268. Δίνονται συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x=0$ με

$$f(0) = g(0), f(x) - \eta\mu x \leq g(x) + xe^x \Rightarrow f'(0) = g'(0) + 2$$

2269. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=4$ με $f'(4) = 0, g(x) = \begin{cases} f(3x+1), & x < 1 \\ f(6x-2), & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow g'(1) = ;$

$$0$$

2270. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=0$, $|f(x) - 3x| \leq \eta\mu^2 x$, να βρεις :

$$\bullet f'(0) = ;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(9x) - f(x)}{f(2x)} = ;$$

$$3, 4$$

2271. Να εξετάσεις αν είναι συνεχής και παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & x \leq 3 \\ 3x^2 - 12x, & x > 3 \end{cases}$

2272. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=2$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - ax + 1, & x \leq 2 \\ bx + a, & x > 2 \end{cases} \Rightarrow a, b = ;$

$$-15, 27$$



2273. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=0$ με

$$f(0) = f'(0) = 1, g(x) = \begin{cases} f^2(x), & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}, \exists g'(0) \Rightarrow a, b = ;$$

2274. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0) = 0, g(x) = (x^2 + 1)f(x) + 3x \Rightarrow g'(0) = ;$

3

2275. Αν συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο 2 με $g(x) = \begin{cases} f^3(x) + f(x), & x \leq 2 \\ f^2(x) + 6, & x > 2 \end{cases}$, να βρεις :

- $f(2)$
- $f'(2)$

2276. Δίνεται συνεχής συνάρτηση στο $x=3$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, g(x) = |x^2 - 9|f(x) \Rightarrow \exists g'(3);$

Ø

2277. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=3$ με $f'(3) = f(3) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 25}{x^2 - x - 6} = ;$

10

2278. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $x=0$ όπου $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3x}{x^2} = 6 \Rightarrow f'(0) = ;$

3

2279. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=1$ με $f'(1) = 4, f(1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{\sqrt{x+3} - 2} = ;$

8

2280. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=a$, να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

$$f(a) - af'(a)$$

2281. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $x=-2$ με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 1}{h} = 4 \Rightarrow f'(-2) = ;$

4

2282. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=2$ με $f'(2) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - f(2)\sqrt{x^2 + x + 3}}{x - 2} = ;$

$$3 - \frac{5}{6}f(2)$$

2283. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=a$, να υπολογίσεις $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+2h) - f^2(a)}{h} = ;$



$$4f(a)f'(a)$$

2284. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=a$, να υπολογίσεις $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+kh) - f(a-mh)}{h}$, $k \neq 0, m \neq 0$

$$(k+m)f'(a)$$

2285. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεις τα α, β αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη

στο 1

$$a=3, b=-2$$

2286. Δίνεται η f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεις τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1

2287. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(1)=1, f'(1)=\frac{3}{2}$ και συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} 2x^3 - x, & x < 1 \\ f^2(x), & x \geq 1 \end{cases}$. Να εξετάσεις

αν g παραγωγίσιμη στο 1.



2288. Αν $f(x) = \ln(x^3 + 1)$, να βρεις τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$$

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$$

2289. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g, h(x) = g(f(x)) + xg(x) + 4x, h'(0) = ?$, αν f άρτια, g περιττή.

2290. Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(1)=2, f(x^3)=4x+f(x), \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(x) - 2}{x - 1} = ?$

2291. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο x_0 , να βρεις το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h}$

$$3f'(x_0)$$

2292. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax - a, & x \geq -1 \\ -ax^2 + bx - \gamma, & x < -1 \end{cases}$, να βρεις α, β, γ αν γνωρίζεις ότι είναι

παραγωγίσιμη στο -1.



2293. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 με $f(0) = 4, f'(0) = 2$, να βρεις τα α, β ώστε η

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x + 4, & x \leq 0 \\ \alpha f^2(x) + \beta, & x > 0 \end{cases} \text{ να είναι παραγωγίσιμη στο } 0.$$

2294. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(2) = 1, f'(2) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 f(x) - 8}{x^2 - 4} =$;

5

2295. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $|f(x) - \sqrt{x^2 + 3}| \leq (x-1)^2, f'(1) =$;

$\frac{1}{2}$

2296. Ν.δ.ο. αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι άρτια τότε η παράγωγός της είναι περιττή και $f'(0) = 0$

2297. Δίνεται η $f(x) = ae^{2x} + be^{3x} \Rightarrow f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$

2298. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & 0 < x < 1 \\ b \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρεις τα α, β .

2299. Να εξετάσεις αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2300. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις

$$f, g: f(1) = g(1) = -2, f'(1) = 3, g'(1) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - 4}{x - 1} =$$

-2

2301. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 3x + 2}{x - a} = 0$, να βρεις την εφαπτόμενη στο

$$A(a, f(a))$$

$$y = 3x - 2$$

2302. Αν f άρτια και παραγωγίσιμη, $f(2) = 1, f'(2) = 5$, να βρεις :

- $f'(-2)$
- $f'(0)$

-5, 0

2303. Αν f παραγωγίσιμη στο 0 να βρεις το όριο



$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(2x)}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(3x) - f^2(2x)}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(3x) - f^3(2x)}{x} \end{aligned}$$

$$f'(0), 2f(0)f'(0), 3f^2(0)f'(0)$$

Συναρτησιακή σχέση $f(x+y)$ όπου f παραγωγίσιμη στο a , τότε υπολογίζω $f(a)$ και υπολογίζω $f'(x_0)$ από τον τύπο με το h .

Συναρτησιακή σχέση $f(xy)$ όπου f παραγωγίσιμη στο a τότε υπολογίζω $f(a)$ και υπολογίζω $f'(x_0)$ από τύπο χωρίς h θέτοντας $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{a}$.

2304. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -ax^2 + bx - \gamma, & x < -1 \\ x^2 - 2ax - a, & x \geq -1 \end{cases}$, να βρεις τα a, β, γ αν η συνάρτηση είναι

παραγωγίσιμη.

2305. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0 με $f(0) = 4, f'(0) = 2, g(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \leq 0 \\ af^2(x) + b, & x > 0 \end{cases}$, να βρεις a, β ώστε g παραγωγίσιμη στο 0.

2306. Έστω f, g παραγωγίσιμες με $f(x) = g(x^4 - 2x^2) \Rightarrow f'(1) =$

2307. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(0) = 2$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

2308. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
- Έστω η $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

2309. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x, x > 0$.

- Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .



Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$

- Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.
- Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

2310. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x}$, όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του k .

Για $k = 1$,

- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$.

2311. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x+1)$, $x > -1$. Όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

- Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $a = e$
- να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
- να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

- αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

2312. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να βρείτε την παράγωγο της f στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$ και στο πεδίο ορισμού της
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

2313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.



- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.
- Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

2314. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

- Να βρεις το a ώστε συνεχής
- Για $\alpha = 1$, ν.δ.ο. παραγωγίσιμη
- Να βρεις εφαπτομένη στο $x=1$

2315. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη όπου

$$f' \uparrow, f(1) = 1, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0, \text{ να αποδείξεις ότι}$$

- $f'(1) = 0$
- ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$

2316. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ .
- Για $\lambda = 0$
- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.
- να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

2317. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.
- Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5, f(5))$.
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

2318. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta \mu 2x} = 5$$

- Να βρείτε το $f(0)$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.



- Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

2319. Να βρείτε την παράγωγο της f στο x_0 , όταν:

- $f(x) = x^2 + 3, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = \frac{2}{x}, \quad x_0 = -1$
- $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x_0 = 2$
- $f(x) = 4\sqrt{x} + 1, \quad x_0 = 3$
- $f(x) = x^3 + 2x + 5, \quad x_0 = 2$
- $f(x) = x^2 + 4 + \sqrt{x^2 + 3}, \quad x_0 = 1$

2320. Να υπολογίσετε την παράγωγο της f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(3+h) = 2 + 3h + h^4$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 3$
- $f(1+h) = 1 + h^2 + \sin 2h$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 1$

2321. Να βρείτε το $f'(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0$
- $f(x) = (x^2 - 1)|x - 1|, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = 3x^2 + x\sqrt{x+1} + \sin 2x, \quad x_0 = 0$

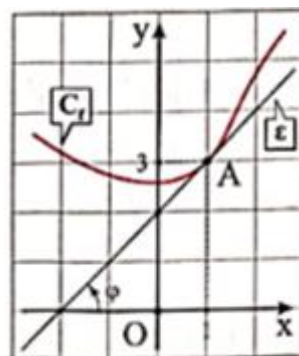
2322. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της C_f στο

σημείο A που είναι η: $y = x + 2$

- Να υπολογίσετε το $f(1)$, το $f'(1)$ και την εφφ.

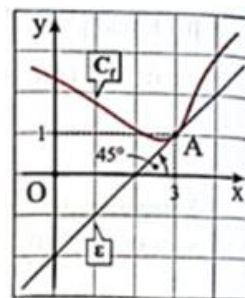
Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 3}{h}$





2323. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A .



- Να υπολογίσετε το $f(3)$ και το $f'(3)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ).

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-1}{h}$

2324. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = -1$.

- $f(x) = \begin{cases} x^3 + x - 3, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^2 + 6x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} x^2 + 9x - 3, & \text{αν } x < -1 \\ x^3 + 4x - 6, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$

2325. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , όπου:

- $f(x) = |x - 1| + 1, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = |x^2 - 4| + x - 2, \quad x_0 = 2$

2326. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ στις επόμενες περιπτώσεις:

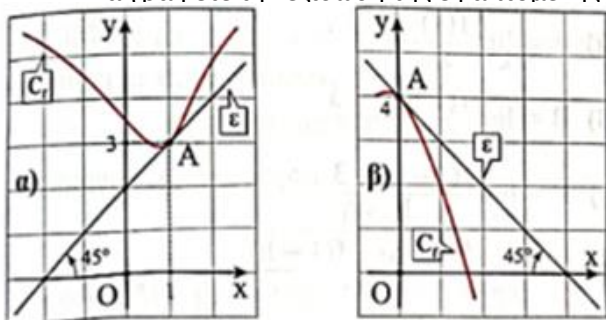
- $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} + 1, & \text{αν } x < 0 \\ \sin 2x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

2327. Να βρείτε την παράγωγο της f στο x_0 , όταν:

- $x \leq f(x) - 1 \leq x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $2x + 3 \leq f(x) \leq x^2 + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 1$
- $2x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 1$
- $\eta \mu 2x - x^2 \leq f(x) \leq \eta \mu 2x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$
- $5\eta \mu^2 x - 3x^4 \leq xf(x) \leq 5\eta \mu^2 x + 3x^4, \quad x_0 = 0$ και f συνεχής στο 0
- $|xf(x) - \eta \mu^2 x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0, f(0) = 0$



2328. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης στις παρακάτω περιπτώσεις:



2329. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = x^3 + x + 1, \quad x_0 = 0$

2330. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όταν:

- $f(x) = x^2 + x - 2, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3, \quad x_0 = -1$
- $f(x) = 2\sqrt{x} + 2, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = 2 - x + x \ln x, \quad x_0 = 0$

2331. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6, & \text{αν } x < 1 \\ -\frac{4}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 4x - x^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

2332. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ όταν:

$$2x^2 - x + 2 \leq f(x) \leq 3x^2 - 5x + 6 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2333. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + x + \alpha^2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 2, & \text{αν } x < 1 \\ \beta\sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

2334. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στις επόμενες περιπτώσεις:



- $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \\ 3, & \text{αν } x = 2, \quad x_0 = 2 \\ \gamma x^2 + x - 3, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta\sqrt{x} + 3 + 6, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + (\alpha + \beta)x - 1, & \text{αν } x \geq 1, \quad x_0 = 1 \end{cases}$

2335. Αν η f είναι συνεχής στο 3 και: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$ να αποδείξετε ότι:

- $f(3) = 0$
- $f'(3) = 5$

2336. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 10$ να αποδείξετε ότι:

- $f(2) = 0$
- $f'(2) = 10$

2337. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-x^3}{x-1} = 2$ να αποδείξετε ότι:

- $f(1) = 1$
- $f'(1) = 5$

2338. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$.

- Να υπολογίσετε το $f(2)$ και το $f'(2)$.
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(2, f(2))$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-1}{h}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h)-1}{h}$

2339. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-2}{h} = 4$.

- Να υπολογίσετε το $f(3)$ και το $f'(3)$.
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{\eta\mu(x-3)}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6f^2(x)-24}{x^2-9}$

2340. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με:

$f'(1) = 2$ και $f(1) = 3$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1}$



- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-3}{h}$
- $\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-3}{h}$
- $\Delta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

2341. Αν $f^2(x) - 2xf(x) = 3\eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0 = 0$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

2342. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) - xf^2(x) - x^2 f(-x) = x^2 \cdot \eta\mu x \quad \text{να αποδείξετε ότι } f'(0) = 1.$$

2343. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 2$.
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

2344. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και έχει την ιδιότητα:

$$x^2 f^3(x) + f(x) + 1 = x^3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{Να αποδείξετε ότι } f'(1) = 3.$$

2345. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με $f(x_0) = g(x_0) = 0$ και $g'(x_0) \neq 0$, να

$$\text{αποδείξετε ότι: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2346. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x)| \leq |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = g'(0) = 0$ να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

2347. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και: $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$.

- Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο α .
- Να βρείτε τη γωνία την οποία σχηματίζει η εφαπτομένη της C_g στο A με τον άξονα $x'x$.

2348. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{Αν η } f \text{ παραγωγίζεται στο } x_0 = 0 \text{ με } f'(0) = 2, \text{ να αποδείξετε ότι παραγωγίζεται σε κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2349. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

2350. $f(x+y) = f(x)\sin y + f(y)\sin x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 2$



- $f'(x) = 2\sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2351. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2f(x) - x_0^2f(x_0)}{x - x_0} = x_0^2f'(x_0) - 2x_0f(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$

2352. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x^2), & \text{αν } x \leq 1 \\ f(2x - 1), & \text{αν } x > 1 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με: } g'(1) = 2f'(1).$$

2353. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ με $f(1) - g(1) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f(x) \leq g(x) + x^2$ να αποδείξετε ότι: $f'(1) - g'(1) = 2$

2354. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση } f \text{ παραγωγίζεται σε κάθε } x_0 \in \mathbb{R}^*.$$

2355. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 2 και η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x^3 + 1), & \text{αν } x < 1 \\ f(2x), & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι: } f'(2) = 0$$

2356. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 7$

Να αποδείξετε ότι:

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 7$
- Να γράψετε την εφαπτομένη της C_f στο: $A(1, f(1))$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h^2}$

- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - h}{h^2 + h^3}$

- Να υπολογίσετε το όριο: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x - 3}{x^2 - 1}$

2357. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 2$

Να αποδείξετε ότι:



- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 2$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-3h)}{h}$

2358. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2023$

Να αποδείξετε ότι:

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{\sqrt{x+4} - 2}$
- Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda f^2(x)}{2x^2 + f^2(x)} = 3$

2359. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - 2}{h} = -4$

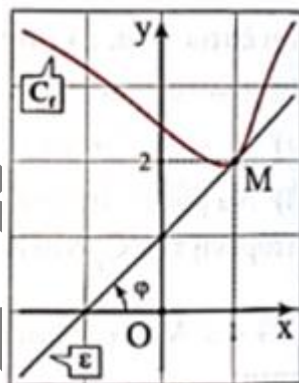
- Να υπολογίσετε το $f(3)$ και το $f'(3)$.
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$.



Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-4h)}{\eta\mu 6h}$

2360. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της (ϵ) στο σημείο $M(1,2)$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία $\varphi = \frac{\pi}{4}$.



- Να αποδείξετε ότι: (ϵ): $y = x + 1$
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 1$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h^2)}{h - \eta\mu 2h}$

2361. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 4} = 1$

- Να αποδείξετε ότι: $f(2) = 1$ και $f'(2) = 3$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 1}{\sqrt{2x} - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4}{x - 2}$

2362. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x} = 2$

- Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu^2 x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta\mu x \eta\mu 5x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) f(3x)}{x^2}$



- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)+x}{f(\eta\mu 2x)}$

2363. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f'(1) = 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{\sqrt{x}-1}$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+x^2-3}{x^2-1}$

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(4-x)-2}{x-3}$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-2}{h}$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h)-f^2(1)}{h}$

2364. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 7$.

- Να αποδείξετε ότι: $f(1) = 0$ και $f'(1) = 7$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-h}{h^2+\eta\mu h}$ και $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 7$.

2365. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 f(x) - x^2 f(x_0)}{x - x_0}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x f(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x)$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h}$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0-h^2)}{h - \eta\mu 2h}$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+3h)-f(x_0-5h)}{f(x_0+6h)-f(x_0-2h)}$$

2366. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: - $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ - η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) \neq 0$ - $f(2) > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x > 0$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε x κοντά στο $\frac{1}{2}$.
- Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{x}$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h)-f(1-5h)}{f(1+6h)-f(1-3h)}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-h}{h^2+\eta\mu h}$

2367. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(x+y) = f(x)\sin y + f(y)\sin x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με: $f'(0) = 1$

- Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με: $f'(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+2h)-f(\alpha-h^2)}{h-\eta\mu 2h}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+3h)-f(\alpha-4h)}{f(\alpha+6h)-f(\alpha-h)}$

Σύνθετη παραγωγή

Να βρεις την παράγωγο των συναρτήσεων :

$$\text{Το νου σου : } (e^{\varphi x})' = \frac{1}{\sin^2 x}, (\sigma \varphi x)' = \frac{-1}{\eta \mu^2 x}, \ln |x| = \frac{1}{x},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = \dots$$

$$\text{κπεριττός : } \left(\sqrt[k]{f^k(x)} \right)' = \left((f(x))^{\frac{k}{k}} \right)' = \dots$$

$$\text{κάριος : } \left(\sqrt[k]{f^k(x)} \right)' = \left(\sqrt[k]{|f(x)|^k} \right)' = \left(|f(x)|^{\frac{k}{k}} \right)' = \dots$$



2368. $f(x) = (x^3 - x^2 + 2)^5$

2369. $g(x) = \eta\mu x^5$

2370. $h(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

2371. $f(x) = \eta\mu^5 x$

2372. $g(x) = e^{x^2} + x^e$

2373. $h(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$

2374. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}}$

2375. $g(x) = x^x$

2376. $h(x) = x^{\ln x}$

2377. $f(x) = (\ln x)^x$

2378. $g(x) = 2^{x^2 - 5x}$

2379. $h(x) = t^{t+1} + x^{x^2}$

2380. $f(x) = |x^2 - 16|$

2381. $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$

2382. $g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$

2383. $g(x) = \sqrt[5]{x^2}$

2384. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

2385. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(x^3 + 3x + 1) = e^x - 4\eta\mu x \Rightarrow f'(1) = ;$

-1

2386. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(x^3 + x) = (x^3 - 6x + 2)^4 \Rightarrow f'(2) = ;$

2387. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε

$$f''(4) = f'(4) = 2, g(x) = f(3x^2 - 2x + 3) \Rightarrow g'(1) = ;$$

2388. Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{g(x^2)} \Rightarrow \frac{f'(1)}{f(1)} = 2g'(1)$



2389. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + 2$. Ν.δ.ο. αντιστρέφεται και να υπολογίσεις : $(f^{-1})'(3)$

$$\frac{1}{2}$$

Να βρεις τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(x)$:

2390. $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$

2391. $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$

2392. $f(x) = 1 + \ln^3 x$

2393. $f(x) = x^3 + \eta\mu^4 x$

2394. $f(x) = \sqrt[5]{(1 + 2x^2)^3}$

2395. $f(x) = \eta\mu^2(3x + 1)$

2396. $f(x) = x\epsilon\phi 5x$

2397. $f(x) = 1 + \epsilon\phi^3 2x$

2398. $f(x) = e^{x^2 + x - 5}$

2399. $f(x) = x3^x$

2400. $f(x) = \ln(x^3 \sqrt{5x + 1})$

2401. $f(x) = \log x^2$

2402. $f(x) = x|x|$

2403. Αν $f(\ln x) = e^x + \ln x$, να υπολογίσεις τη δεύτερη παράγωγο στο 0

$$2e$$

2404. Έστω $P(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + 2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{\eta\mu 2x} = 3$. Να βρεις τη συνάρτηση

$$2x^2 + 6x$$

2405. Να βρεις την παράγωγο των : $f(x) = a^{\sqrt{x^2 + 1}}$, $h(x) = g(x)^x$

2406. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = (x^2 - x + 1)^6$

- $f(x) = \eta\mu^3 x$



- $f(x) = \sin^5 x$
- $f(x) = \ln^4 x$
- $f(x) = e^{4x}$
- $f(x) = \eta\mu 3x$
- $f(x) = \sin 5x$
- $f(x) = \ln 4x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $f(x) = \epsilon\phi^2 x$
- $f(x) = \epsilon\phi 2x$
- $f(x) = \sigma\phi^4 x$
- $f(x) = \sigma\phi 4x$
- $f(x) = e^x + e^{-x}$

2407.

Να βρεις τις παραγώγους των συναρτήσεων

- $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1), \quad x > 0$
- $f(x) = 2(\sqrt{x} \cdot \eta\mu\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}), \quad x > 0$
- $f(x) = \sin^5(x^2 + 1)$
- $f(x) = \ln^4(x^2 + 4)$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 3$
- $f(x) = e^{\sin(2-x^2)}$
- $f(x) = \sqrt{\eta\mu(\sin x)}$
- $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

2408.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

- $f(x) = (x^2 + x + 1)^5$
- $f(x) = \eta\mu 3x$
- $f(x) = \sin^4 x$
- $f(x) = \sin 4x$
- $f(x) = \sqrt{x^4 + 5}$
- $f(x) = \eta\mu^3 x$



- $f(x) = \ln^3 x$
- $f(x) = \eta\mu(e^x + x^2)$

2409. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = (x^2 + 1)^3 + \eta\mu^2 \theta$
- $f(\theta) = (x^2 + 1)^3 + \eta\mu^2 \theta$
- $f(x) = e^{x^2} - \sigma\upsilon\nu^2 \theta$
- $f(\theta) = e^{x^2} - \sigma\upsilon\nu^2 \theta$
- $f(x) = \eta\mu e^x + \sigma\upsilon\nu e^\theta$
- $f(\theta) = \eta\mu e^x + \sigma\upsilon\nu e^\theta$

2410. Να βρείτε την παράγωγο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$
- $f(x) = \epsilon\phi(\eta\mu x^2)$
- $f(x) = e^{x^2-2x+3}$
- $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$
- $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^3}$
- $f(x) = -\sigma\phi x^2 \cdot \epsilon\phi^2 x$
- $f(x) = e^{-x}(x+1)^2$
- $f(x) = \eta\mu^3 2x$

2411. Να βρείτε την παράγωγο της f στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
- $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-2} + (x^2 + x + 6)^2$
- $f(x) = \sigma\phi(\eta\mu x) \quad \zeta) \quad f(x) = \eta\mu^3(e^{x^2+1})$
- $f(x) = \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2412. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$g(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}, \quad h(x) = \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1}, \quad \varphi(x) = x[\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)]$$

Να αποδείξετε ότι:

- $f'(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$
- $g'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $h'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2}$
- $\varphi'(x) = 2\eta\mu(\ln x)$

2413. 15.46 Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:



- $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
- $g(x) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$
- $h(x) = \eta\mu^2(3x) + \sigma\upsilon\nu^3(2x)$
- $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\omega(x) = e^{x^2+1} + \ln(x^2 + 1)$
- $\kappa(x) = \ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2414. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = \sqrt{\eta\mu^3 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = \ln x \cdot \ln(2x)$

2415. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρείτε την g' όταν:

- $g(x) = f(\eta\mu 2x)$
- $g(x) = f^2(\sqrt{x^2 + 1})$
- $g(x) = \ln(1 + f^2(x))$
- $g(x) = xf(x^3)$
- $g(x) = e^{\sqrt{1+f^4(x)}}$
- $g(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu f(x)$
- $g(x) = f^3(\eta\mu 2x)$
- $g(x) = e^{f(\sqrt{x^2+5})}$

2416. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Να βρείτε την παράγωγο $f'(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(-x) - f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$
- $f(x-4) - f(2-x) = x^2 + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = -1$

2417. Να βρείτε την $f''(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- $f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

2418. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:



- $f(x) = xe^{-x}$
- $f(x) = xe^x$
- $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$
- $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$
- $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

2419. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ και $g(x) = 2(\sqrt{x}\eta\mu\sqrt{x} + \sigma\upsilon\nu\sqrt{x})$ Να αποδείξετε ότι:

- $f'(x) + 2\sqrt{x}f''(x) = 2e^{\sqrt{x}}$
- $(g'(x))^2 + 4x(g''(x))^2 = 1$

2420. Η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2+4} + 2\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$, $x > 0$ Να αποδείξετε ότι:

- $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$
- $f''(x) = -\frac{1}{x}f'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

2421. Να υπολογίσετε την $f'''(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \ln\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)$
- $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$
- $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \epsilon\phi x\right)$
- $f(x) = \frac{x\alpha^x \ln \alpha - \alpha^x}{\ln^2 \alpha}$

2422. Να υπολογίσετε την $f'''(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- $f(x) = x\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$
- $f(x) = x[\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)]$
- $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

2423. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $\alpha e^{3x} + \beta e^{2x} + \gamma e^x + \delta = 0$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

2424. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

- $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x^2 + 6x - 8, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$



$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^4 + 5x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

2425. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{1}{x^5}, \quad x \neq 0$$

$$f(x) = x^{-6}, \quad x \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5}, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}}, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^{-\frac{5}{4}}, \quad x > 0$$

2426. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$

• Να βρείτε τις παραγώγους των f, g για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

• Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

• Να αποδείξετε ότι $g'(0) = 0$.

• Να αποδείξετε ότι η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

2427. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = x^x, \quad x > 0$$

$$f(x) = (x+1)^x, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^{x+1}, \quad x > 0$$

$$f(x) = (\eta\mu x)^x, \quad x \in (0, \pi)$$

$$f(x) = (\ln x)^x, \quad x > 1$$

$$f(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0$$

2428. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = x^{e^x}, \quad x > 0$$

$$f(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^x, \quad x \in (0, \pi)$$



- $f(x) = (\ln x)^{\ln x}, \quad x > 1$
- $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0$
- $f(x) = x^{x^x}, \quad x > 0$
- $f(x) = (\eta\mu x)^{\ln(\eta\mu x)}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2429. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad f'(0) = 1 \quad \text{Να αποδείξετε ότι:}$$

- $f'(x) = f'\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$

2430. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

2431. $f(x+y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- $f'(x+y) = -f'(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 0$

2432. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - \eta\mu x \cdot \eta\mu y \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{να αποδείξετε ότι:}$$

- $f'(x+y) = f'(x)f(y) - \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x, y \in \mathbb{R}$
- $f'(x+y) = f(x)f'(y) - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y, \quad x, y \in \mathbb{R}$

2433. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$. Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι:

2434. $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$ να αποδείξετε ότι: $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2435. Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f(xy) = f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι: $(x+y)f'(xy) = 2(f(x) + f(y))(f'(x) + f'(y))$

2436. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

- Αν $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) + y^2 = f'(y) + x^2$$



- Αν είναι $f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι:

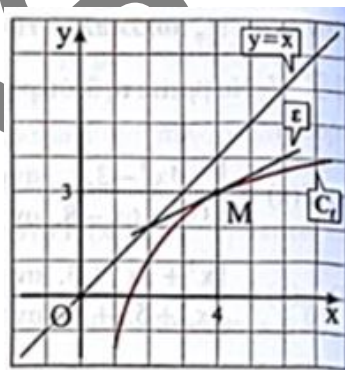
$$x(f(x) + xf'(x)) = y(yf'(y) + f(y))$$

2437. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $B(1, f^{-1}(1))$.
- Να αποδείξετε ότι $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

2438. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της (ϵ) στο σημείο $M(4,3)$. Αν $f'(4) = \frac{1}{2}$, να βρείτε:

- την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) ,
- την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N(3,4)$ γ) τον αριθμό $(f^{-1})'(3)$



2439. Αν η συνάρτηση f είναι "1-1" και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(f^{-1}(\alpha)) = 0 \text{ να αποδείξετε ότι η } f^{-1} \text{ δεν παραγωγίζεται στο } x_0 = \alpha.$$

2440. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^7 + x^5$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

2441. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x + 1$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να αποδείξετε ότι $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$.

2442. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in B = (0, \pi)$ Αν δίνεται ότι οι f^{-1} και g^{-1} είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$



- $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ για κάθε $x \in (-1,1)$

2443. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

- Να ορίσετε, αν υπάρχει, την f^{-1} .
- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f^{-1} .

2444. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι η f' είναι περιττή.
- Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η f' είναι άρτια.
- Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και άρτια, να αποδείξετε ότι $f^{(3)}(0) = 0$.
- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και άρτια, να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $g(x) = f(x)f'(x)$ είναι άρτια.
- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή, τότε $f''(0) = 0$.

2445. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει μη σταθερό πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο, ώστε $f'(x) = f(x)$.

2446. Να αποδείξετε ότι :

- μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα των $f(x)$ και $f'(x)$.
- Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το: $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 8$ να έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.

2447. Δίνεται πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$.

γ. Να αποδείξετε ότι:

- $\frac{\alpha}{f'(\alpha)} + \frac{\beta}{f'(\beta)} + \frac{\gamma}{f'(\gamma)} = 0$
- $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma}$, $x \neq \alpha, x \neq \beta, x \neq \gamma$
- $(f'(x))^2 > f(x)f''(x)$, $x \neq \alpha, x \neq \beta, x \neq \gamma$
- $\frac{f''(0)}{f(0)} = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$

2448. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{αν } x < -1 \\ x - x^2, & \text{αν } x \in [-1,1] \\ x^2 - 3x + 2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.



- Να εξετάσετε αν η f' είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.
- Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .

2449. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 2 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{xe^{x-1}}{x^2 + 1}$$

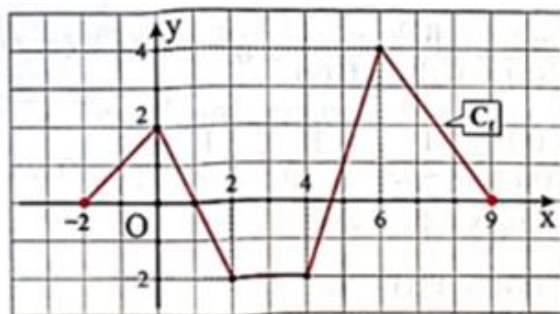
Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 2}{x - 1}$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f'(1))$.

2450. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

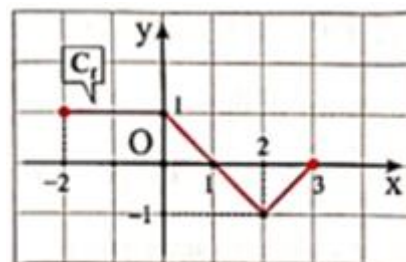
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha))$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = \frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f'(\alpha) \ln \alpha, \quad \alpha > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \eta \mu \alpha - f(\alpha) \eta \mu x}{x - \alpha} = f'(\alpha) \eta \mu \alpha - f(\alpha) \sigma \upsilon \nu \alpha$

2451. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-2, 9]$.



- Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1 = 0, x_2 = 6$.
- Να βρείτε την $f'(x)$.
- Να σχεδιάσετε την $f'(x)$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .

2452. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .



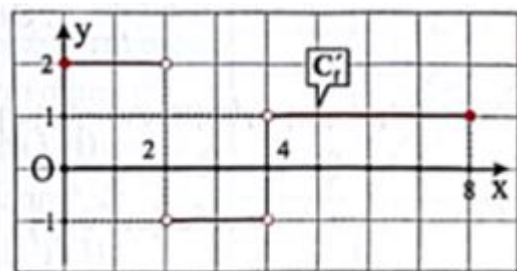
- Να βρείτε την $f'(x)$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f'(x)$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .



2453. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,8] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) =$

0. Η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

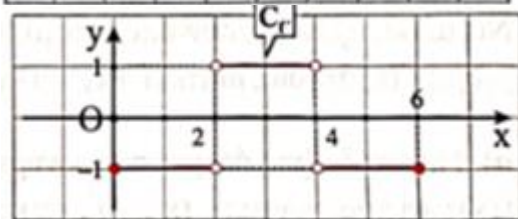
- Να γράψετε τον τύπο της $f'(x)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x, x \in [0,2]$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- Να γράψετε τον τύπο της f .



2454. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι

συνεχής με $f(0) = 0$. Η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο

παρακάτω σχήμα. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .



2455. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f^2(x) + 1 = \sin^2 x + 2xf(x), x \in \mathbb{R}$ -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
- Να υπολογίσετε τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(4x) - f(-x)\eta\mu 3x}{2x^2 - \eta\mu^2 x}$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

2456. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(\eta\mu x) - \eta\mu x + f(\sin x) - \sin x = 1, \quad x \in \mathbb{R}, f(1) = 1$$

- Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.
- Να υπολογίσετε τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+1}}{\eta\mu x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 1}{x}$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.

2457. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x^3) - 4f(x^6) = -3x^2 + 2x - 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f'(1) = \frac{1}{3}$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Να υπολογίσετε τα όρια:



- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-2}{h}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2x^2}{xf(x)-2}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-2}{h^2+\eta\mu h}$

Έστω $g(x) = f^3(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $g(0) = 8$ και $g'(0) = 4$.
- Να υπολογίσετε το όριο:
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \sqrt{x^2 + 9} - 5}{\eta\mu 4x}$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $N(0, g(0))$.

2458.

Μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει την ιδιότητα: $\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = -\frac{1}{e^x}(x^2 - 3x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε:

- τον βαθμό της f ,
- τη συνάρτηση f ,
- την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$,
- το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{2}{f(x)}\right)$.

2459.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να υπολογίσετε την αντίστροφη της f .
- Να υπολογίσετε την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.

A5. Να αποδείξετε ότι :



α) Αν $f(x) = c$, με $c \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) = 0$

β) Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$

γ) Αν $f(x) = x^v$, με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, τότε $f'(x) = vx^{v-1}$

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

Απόδειξη

α) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

β) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει ότι: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

γ) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$

δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$.

δ) Αν $x_0 \in (0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(Σημείωση: η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0).

Α6. Θεώρημα (Παράγωγος αθροίσματος)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη



Για $x \neq x_0$, ισχύει:
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0), \text{ δηλαδή } (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

