

Συναρτήσεις

Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
347 ασκήσεις
και τεχνικές
σε 59 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



kglykos.gr

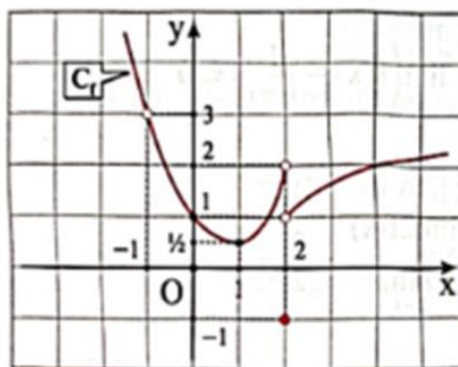
Εισαγωγή στα Όρια

Τα πάντα για τις
συναρτήσεις



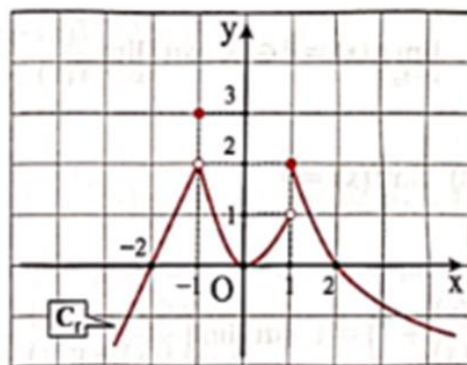
883. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



884. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

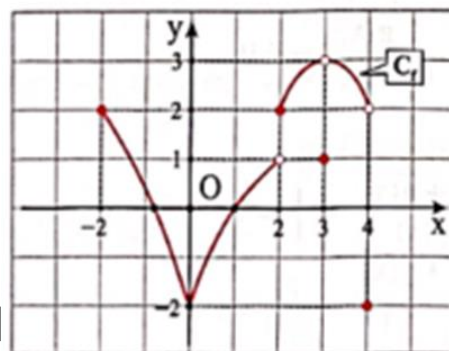
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$





885. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-2, 4]$. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

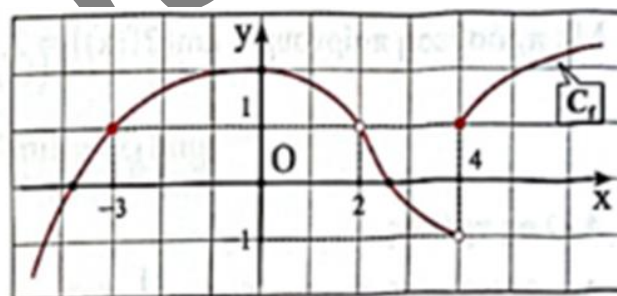
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$



886. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και
- στη συνέχεια να το συγκρίνετε με την τιμή $f(x_0)$, αν αυτή υπάρχει.

Για i) $x_0 = -3$ ii) $x_0 = 2$ iii) $x_0 = 4$



887. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \\ 2 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

888. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα.

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), D_f = [0, 5]$



- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \quad D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \quad D_f = (3, +\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x), \quad D_f = (-\infty, 4)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \quad D_f = (1, 2) \cup (4, 5)$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x), \quad D_f = [-1, 2] \cup \{3\}$

889. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$ και $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2\lambda - 1$ να βρείτε τις τιμές του λ έτσι, ώστε να υπάρχει το: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$;

890. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-1)^{10}(x^2+x-1)]$
- $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+1}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+\sqrt{x^2+x+3}}{x^2+x-1}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+2|+x^3+2x+1}{|x+3|-1}$

891. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{αν } x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \notin [-1, 1] \end{cases}$

- Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

892. Αν είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \alpha + 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \beta + 2$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2\alpha + 1$ και $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3\beta - 4$

να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι, ώστε να υπάρχουν τα: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

893. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -2} (|x^3 - 1| + x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x^2 + 2x + 6} - 2x)$



$$\bullet \Gamma = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2-3)^7 + 4x-2}{\sqrt{x^2+2x+1}+2x}$$

$$\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+6}+x^2}{|2x+1|}$$

Όρια $\frac{0}{0}$

- Η f έχει όριο στο $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

1ος Κανόνας: de L'Hospital.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

894. Να υπολογίσεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x}-3}{2x-2}$

$$\frac{1}{12}$$

895. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

$$\frac{3}{2}$$

896. Να υπολογίσεις : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}$

$$1-\sqrt{6}$$

897. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

$$\frac{5}{4}$$

898. Ομοίως $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x+2}+1}{x-2}$

$$\frac{7}{4}$$

Σε όριο Α.Μ. $\frac{0}{0}$ έχεις 3 επιλογές

- Horner σε αριθμητική- παρονομαστή
- Συζυγή παράσταση σε άρρητες μορφές
- De'l Hospital

Σε ριζικά με το ίδιο υπόριζο διαφορετικών τάξεων βρίσκεις το ΕΚΠ των τάξεων και θέτεις

$$\text{ΕΚΠ} \sqrt[n]{f(x)} = y$$

Αν δίνεται όριο ποσότητας που περιέχει την $f(x)$ και ζητείται το $\lim f(x)$ τότε ΘΕΤΩ βοηθητική συνάρτηση $g(x)$.

Όριο που περιέχει απόλυτο : σε περίπτωση Α.Μ. κάνε το πινακάκι για το απόλυτο ώστε να δεις το πρόσημό του .Στην χειρότερη περίπτωση μπορεί να χρειαστείς πλευρικά όρια

Κριτήριο παρεμβολής : Αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $\dots \leq f(x) \leq \dots$ τότε οποιοδήποτε όριο το δουλεύεις κατασκευαστικά .



899. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5} - 6}$

$\frac{4}{5}$

900. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+7} - 3}{2 - \sqrt{2f^2(x)-4}} =;$

$-\frac{1}{12}$

901. Να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x\sqrt{x} + x - 6\sqrt{x}}$

$\frac{4}{5}$

902. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{4x+1} - 3\sqrt[6]{4x+1} + 2}{\sqrt{4x+1} - 1}$

$-\frac{1}{3}$

903. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f, g : f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1, & x < 1 \\ ax + b, & x \geq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -x + 6, & x \leq 2 \\ ax - b, & x > 2 \end{cases}, \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \Rightarrow a, b =;$$

$a = 2, b = 0$

904. Να βρεις τα a, b αν υπάρχουν τα όρια στο 1, -1 για τη συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2ax^2 + bx, & x \leq -1 \\ 2ax + 3b, & -1 < x < 1 \\ x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$

$a = \frac{19}{8}, b = -\frac{1}{4}$

905. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (a^2 + 3)x^2 + b^2, & x \leq 2 \\ (2a - 3b)x + 2, & x > 2 \end{cases}, \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow a, b =;$

$a = \frac{1}{2}, b = -3$

906. Αν $x^2 + 7x - 16 \leq (x-3)f(x) \leq 3x^2 - 7x + 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =;$

-2

907. Αν $|h(x) - 1| \leq |x^2 + x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) =;$



1

908. Αν $\left| (x+1)f(x) - x^2 - 5x - 4 \right| \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = ;$

3

909. Αν $x^2 + 4x \leq f(x) \leq 3x^2 + 2 \Rightarrow$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ;$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = ;$

5,6

910. Αν $f^2(x) - 4f(x) \leq x - 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ;$

2

Να υπολογίσεις τα όρια :

911. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}$

 $\frac{3}{4}$

912. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu x}{3x + \eta\mu x}$

 $\frac{1}{2}$

913. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+9} - 3}$

18

914. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x^2 - 7x + 12}$

-1

915. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{4x^2 + 3x}$

 $\frac{1}{3}$

916. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\eta\mu x} - \sqrt{2-\eta\mu x}}{x}$

 $\frac{1}{\sqrt{2}}$



Να υπολογίσεις τα όρια :

917. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

$\frac{1}{3}$

918. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2}$

$\frac{4}{3}$

919. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{x+8}-3}$

3

Να υπολογίσεις τα όρια :

920. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|+x^2-3x}{x^2-9}$

$\emptyset$

921. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1|-|x-3|}{x^2-4}$

$\frac{1}{2}$

922. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2|+|x+3|-7}{x^2-x}$

2

923. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+k}{x+2}, & x \geq 0 \\ m+2\sqrt{x^2+4}, & x < 0 \end{cases}$. Να βρεις τα k, m ώστε να υπάρχει το όριο στο 0 και η

γραφική παράσταση να διέρχεται από το $A(1,3)$

8,0

924. Να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x^2-4x+3}$

$\frac{1}{2}$



925. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{2 - \sqrt{8-x^2}}$

1

926. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\eta\mu 2x}$

 $\frac{1}{4}$

927. Να βρεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}-2}$

1

928. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}$

 $\frac{1}{5}$

929. Να βρεις το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$

 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

930. Να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x-4|-2}{x^2-1}$

-1

931. Να υπολογίσετε τα όρια:

• $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x-2}$

• $B = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$

• $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

• $\Delta = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+4x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$

• $E = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+3x^2-4}{x^2-x-2}$

• $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5-2x^4+x^2-x-2}{x^2-5x+6}$



932. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{x-1}{x^2-3x+2} \right)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-11}{2x^2+2x-4} + \frac{x+2}{x^2-1} \right)$

933. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$

934. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+4}+x-1}{x^2+3x+2}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x}$

935. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+2x+10}-x-2}{x^2-4x+3}$



$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3x+5}+x-4}{\sqrt{x-x}}$$

936. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{x^2-1}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x+2}-1}{x^2-2x}$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+3x+6}-x^2+x-4}{x^2-3x+2}$$

937. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x+3}+x+1}{x^2+2x}$$

938. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{αν } x < -1 \\ x^2 + 1, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x-2}, & \text{αν } x < 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \\ \sqrt{x^2+3} - 6x, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2, & \text{αν } x \leq -1 \\ \sqrt{x^2+3} + x - 1, & \text{αν } x > -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + x + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

939. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{2x-2}, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ x^3 - 2x - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 1, x_0 = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} - x^2 + x, & \text{αν } x \in [-3, 1) \\ x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x \in (1, 3) \\ \sqrt{x^2+7} + x - 2, & \text{αν } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad x_0 = 1, x_0 = 3$$



940. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x+1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{3\sqrt{x^2+3}-6}{x-1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

941. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+2|+|x^2-3|-5}{|x-1|}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-3|+|x-2|-1-2x^2}{x^2-3x+2}$

942. Να υπολογίσετε τα όρια που ακολουθούν:

- $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x-2|+|x^2-4|+x-2}{x^2+x-6}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|+x^2-9}{|x-3|}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2-9|+|x-3|}{|x+2|-5}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2-2x-3|+|x-3|}{|x^2-4x+3|+x^2-6x+9}$

943. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - 3x^2 + x - 2) = -4$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

944. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 7) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 5$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-4}{x-2} = 4$
- $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - x^2 + 16) = 20$

945. Αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 3} [g(x)(x^2 - x - 6)] = 3$ να υπολογίσετε τα όρια:



- $A = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow 3} (f(x)g(x))$

946. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)(x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = 2, \quad \text{να υπολογίσετε το: } \lim_{x \rightarrow -1} (f(x)g(x))$$

947. Αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x - 2} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(2x^2 + 3x - 14)] = 11$ να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x)g(x))$

948. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \eta \mu x$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \eta \mu^2 x$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow \pi} \sigma \upsilon \nu x$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sigma \upsilon \nu^2 x}{2}$

949. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 - x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x^4 - x^2}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta \mu x}{x^2 + x^3}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \eta \mu x + \eta \mu^2 x}{x^2 - x}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x+1} - 1}$

950. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{1 - \sigma \upsilon \nu x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu^2 x - 1}{x^2}$



- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu x}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{\eta\mu x}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x + x^2}{x}$
- $Z = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi x}$

951. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi^2 x}{x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x}{x^2}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+\eta\mu x}-3}{\sqrt{x+1}-1}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x} \right)$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{\epsilon\phi x} \right)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x + x}{\sqrt{x+1}-1}$

952. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3+\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2-4\eta\mu x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{x^2+4}-2}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-\eta\mu^2 x}{x^2+\eta\mu^2 x}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{\eta\mu x + \epsilon\phi x}$



953. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 3x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{x}, \quad \alpha \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\alpha x}, \quad \alpha \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi \alpha x}{x}, \quad \alpha \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi \alpha x}{\alpha x}, \quad \alpha \neq 0$

954. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 2x - \epsilon\phi x}{x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x - \eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$

955. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{\eta\mu 2x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 10x}{\epsilon\phi 5x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sigma\upsilon\nu 2x - x}{x^2}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-2) - 1}{x^2 - 5x + 6}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\eta\mu(x-4)}{\sqrt{x+5} - 3}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x) - 1}{x - 2}$

956. Να υπολογίσετε τα όρια:



- $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\eta\mu\pi x}{x-2}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x^2-9}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\epsilon\phi(x-5)}{x^2-25}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$

957. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ -3, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{\eta\mu 3x-x}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

958. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+\eta\mu 4x}{x^2-\eta\mu 2x}, & \text{αν } x < 0 \\ \alpha - x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \alpha + \frac{\epsilon\phi 8x - \eta\mu 2x}{\epsilon\phi 5x + \eta\mu x}, & \text{αν } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ x^3 \eta\mu \frac{1}{x} + 2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

959. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)}{x}, \quad a \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(2x)+f(3x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(4x)f(5x)}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x)}{x \eta\mu^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+\eta\mu x)}{x^2+x}$



Όρια $\frac{a}{0}$

Μορφή $\frac{a}{0}$: δίνει αποτέλεσμα $\pm\infty$

- Horner σε παρονομαστή
- Βρες το προβληματικό
- Σπάσε σε 2 όρια
- Υπολόγισε το πρώτο και στο δεύτερο κάνε πλευρικά όρια .

Το νου σου στο τέλος μπορεί να πάρεις $+\infty, -\infty, \pm\infty$ (δεν υπάρχει)

18. Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συνήθως το σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty .$$

$$\gamma) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ ενώ αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0 .$$

$$\delta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty, \text{ ενώ αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty .$$

$$\epsilon) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 .$$

$$\sigma\tau) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty ,$$

$$\text{ενώ αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty .$$

$$\zeta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty .$$

$$\eta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty .$$

$$\theta) \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^* .$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N} .$$



Να υπολογίσεις τα όρια :

960. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

0

961. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}$

$+\infty$

962. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x|x|}$

$+\infty$

963. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 3}{g(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = ;$

0

964. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\sqrt{x+8}-3)}{\eta\mu\pi x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = ;$

$-\infty$

965. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 f(x) = -4 \Rightarrow$

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ;$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f^2(x) - 5f(x) + 7}{f^2(x) + 2} = ;$

966. Να υπολογίσεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - 1}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, τα α, β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{|x-1|}$

967. Αν $g(x) = x^2 + ax + b, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + g(x) - 3}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow a, b = ;$

968. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - b}{x - 2}, & x < 2 \\ -x^2 + ax + 6, & x \geq 2 \end{cases}, \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow a, b = ;$

969. Να υπολογίσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \alpha}{\sqrt{x^2 + 9} - \beta}$

970. Να βρεις αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x + 1}{(x-1)^2}$

$-\infty$



971. Να βρεις αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 2|}$

$-\infty$

972. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x}$

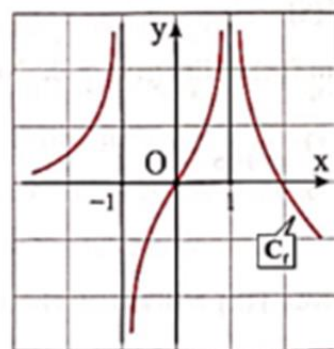
$\emptyset$

973. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^3}$

$-\infty$

974. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{f(x)}$



975. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x^4}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{(x-2)^2}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^5}$

976. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^{2022}}$



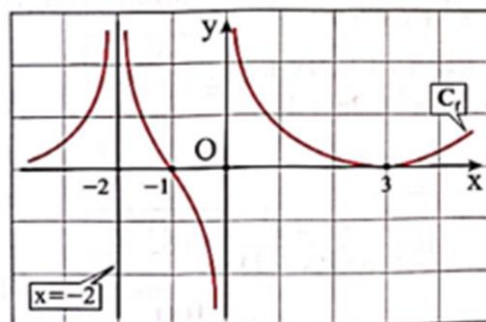
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{(x-1)^{2024}}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-7}{(x+2)^{2024}}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-|x|}{|x-3|}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2-4x+4}$
- $Z = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{|x-2|} + 2\eta\mu \frac{3}{x-2} \right)$

977. 8.19 Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2-x}{|x-3|}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-2x+1}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-7}{x^2-4x+4}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

978. Με βάση το διάγραμμα, να υπολογίσετε τα όρια:

- i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ v) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ vi) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{f(x)}$ iv) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{f(x)}$
- i) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{f(x)}$



979. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \right)$



- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|} \right)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$

980. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2-x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{x^2-9}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^3+3x^2+3x+1}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} \right)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(x+1)^5 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]$

981. 8.23 Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\left(\frac{1}{x-2} \right) \left(\frac{1}{x-2} \right)^2 \right)$

982. 8.24 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu x - x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$, $B = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$



- Υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin x}{f(x)}$;
- Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $x + \eta \mu x$ και
- Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \sin x}{x + \eta \mu x}$

983. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda^2 x - 4\lambda - 8}{x - 4\sqrt{x} + 4}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Για $\lambda = 4$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

984. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να αποδείξετε ότι: $x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in A$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

985. Να υπολογίσετε, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \lambda}{(x - 1)^2}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x - 1}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3\lambda - 1)x^2 - 3x + \lambda^2}{x^2 - 2x + 1}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - \lambda^2 x}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

986. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, όταν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x^2 + \alpha x + 4} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + (\beta + 2)x + 4}{x^2 - 2x + 1} \in \mathbb{R}$

987. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



- Αν $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 13$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^2 + x}$
- Αν $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-1}{f(x)} = +\infty$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

988. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x^2-1)}{x-2} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{g(x)(x-1)} = +\infty$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.

989. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x)f(y) = yf(x) + xf(y) - xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- Να υπολογίσετε το $f(0)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{f(x)}, B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right), \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$



Όρια $\pm\infty$

Όρια στο $\pm\infty$: παίξε με τη μεγαλύτερη δύναμη παντού , σε αριθμητή , παρονομαστή , μέσα στη ρίζα , έξω από τη ρίζα ,

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Να υπολογίσεις τα όρια :

990. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 + 5)$

$-\infty$

991. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 4x^2 - 3x - 6)$

$-\infty$

992. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{2x^2 + 7x + 8}$

$+\infty$

993. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x + 7}{-x^3 + 8x^2 - 7x + 6}$

-1

994. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + 6x|}{3x^2 + x + 4}$


 $\frac{1}{3}$

$$995. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1-x^2| - |3x+5|}{2-|x^2-x-2|}$$

 -1

$$996. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 3}$$

 $+\infty$

$$997. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

 3

$$998. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 3}{x+2}$$

 -2

$$999. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+4 - \sqrt{x^2+3x})$$

 $+\infty$

$$1000. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2+2x+9})$$

 $\frac{3}{2}$

$$1001. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$$

 $\frac{1}{2}$

$$1002. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{9x^2+x-4x+3})$$

 $\frac{11}{3}$

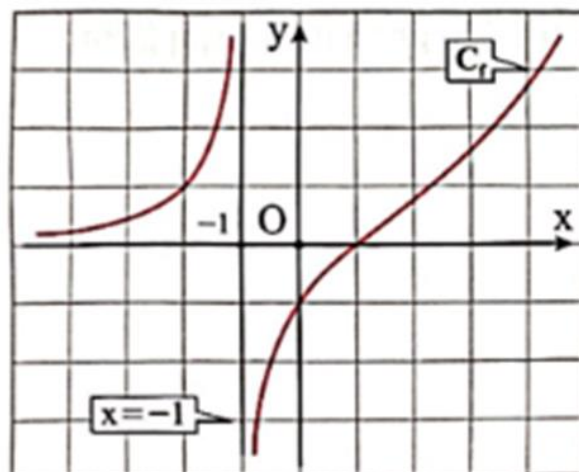
$$1003. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+3} + \sqrt{9x^2+2} - \sqrt{25x^2+3x})$$

$$1004. -\frac{3}{10}$$



1005. Με βάση το παρακάτω διάγραμμα να υπολογίσετε τα όρια που ακολουθούν:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)},$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)},$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x),$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$



1006. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3,$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4,$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^8$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^7,$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^9)$
- $Z = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4),$
- $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^2}$
- $\Theta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{5x^3}$

1007. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 1)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x + 2)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 5x + 10)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x^2 + 2)$



- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^6 + x^5 - x + 1)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 + 4x^3 + 8x + 2)$

1008. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 5}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + x - 3}{x^6 + x^4 + x^2 + 1}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{-2x^3 + x - 1}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + x^5 + 3x + 2}{x^4 - 5x + 6}$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x + 1}{x^3 + 1} \right)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x + 1 \right)$

1009. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 5},$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x},$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x}$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 7} + x)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$
- $Z = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x^2 + 1})$
- $H = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + x)$

1010. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x + 5)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 7)$



- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 7} - x + 2)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 10} - \sqrt{x^2 + 2x + 3})$

1011. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + x + 1}{x + 2}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 7}}{x + 3}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 5x + 7} - 2x + 3}$

1012. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x^2 + 2x - 2 \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2 + 1} - x \leq f(x) \leq \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1013. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 3x + 4)$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{9x^2 - 6x + 5})$

1014. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 3x + 2$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{9x^2 + 6x + 3} - 2x + 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

1015. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x^3 - 5x^2| + 3x - 2}{x^2 + 3x - 2}$



- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|4x^3 - 2x| + 1}{3x + 2}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x^2 - x| + 3x - 5}{x^2 - |5 - 7x|}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 1 - |-5 - x|}{|x^4 - 3x| + 7}$

1016. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{|x-1|+|x-2|}{x-3}$ $g(x) = \frac{|-x^2|+|x^2-9|+|x^2+5x+3|}{x^2+2x+5}$ και $h(x) = \frac{|x^3+1|+|x^3-2|+x+1}{|2x^3+5|+x^2+x+2}$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$



Παραμετρικά όρια

1017. Για τις διάφορες τιμές του a να βρεις το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^2 - 9)x^3 - (a+3)x^2 - ax + 5$

$\pm\infty$

1018. Να υπολογίσεις για τις διάφορες τιμές του a το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^4 - (a-2)x^3 + 2}{(a-2)x^3 + ax^2 + 1}$

$\pm\infty, -1$

1019. Για τις διάφορες τιμές του a να βρεις το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) \left(a^2 + a + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} \right)$

1020. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-4)x^3 - (2a+4b)x^2 + 2x+1}{(b+2)x^2 + 6x-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a, b = ;$

1021. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{bx^2+3}{ax+2} - x + 2 \right) = 4 \Rightarrow a, b = ;$

$a=b=-1$

1022. Για τις διάφορες τιμές του a να υπολογίσεις : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 2} - ax$

1023. Για τις διάφορες τιμές του a να υπολογίσεις : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 3x + 1} + a^2x - 4ax$

1024. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{bx^2 + 1} = 3 \Rightarrow a, b = ;$

$a=6, b=1$

1025. Να βρεις a, b ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - ax - b = 0$

1026. Να βρεις a, b ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x-1} - ax - b = 1$

1027. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του a να υπολογίσεις το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x^3 + 3x + 2}{ax^2 + 1}$

1028. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2 - \sqrt{x}}{x^2 - 2x + 1}$. Να βρεις το όριο της συνάρτησης στο 1 για τις διάφορες

τιμές του a

Παραμετρικά όρια $\frac{\lambda}{0}$: Αν το $\lambda=0$ τότε έχω μορφή $0/0$ και δουλεύω ανάλογα. Αν το $\lambda \neq 0$ τότε δούλεψε όπως μορφή $a/0$ αλλά θα χρειαστείς να πάρεις περιπτώσεις για το πρόσημο του λ .



1029. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b - 1}{x - 2}, & x < 2 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$. Να βρεις τα a, b ώστε να υπάρχει το όριο στο

2

1030. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{|x + 2|}$, να βρεις τα a, β ώστε

1031. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + 2bx - 3}{x - 1}$. Να βρεις τους a, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8$

$$a = 5, b = -1$$

1032. Έστω η συνάρτηση $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2x}{x + 1} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2ax + 3}{2x + 3} = 4$,

να βρεις την τιμή του a

2

1033. Να υπολογίσεις το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ .

1034. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + x + b}{x - 2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$. Να βρεις τα a, β όταν το όριο της

συνάρτησης στο 2 είναι πραγματικός αριθμός

Να υπολογίσεις τα παραμετρικά όρια :

1035. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - a}{x - 2}$

1036. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - b}$

1037. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$

1038. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 - bx^2 + ax - 2}{(a - 1)x^2 + 7x - 2}$

1039. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x - ax + b}$

1040. Να βρεις πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 3x + 2} = 2, \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x) - 2x^2}{x + 3} = 3$



$$2x^2 + 3x - 3$$

1041. Να υπολογίσεις τα α , β όταν : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{ax^2 + bx + 2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$$a = 1, b = -3$$

1042. Να υπολογίσεις τα α , β όταν : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (b+3)x + 2a + b}{x^2 - 4x + 3} = 2$

$$a = 1, b = 3$$

1043. Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β, θ :

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha - 1)x^3 + x^2 + 1]$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha^2 - 9)x^3 + (\alpha - 3)x^2 + (\alpha + 3)x - 5]$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha^2 - 4)x^4 + \beta x^3 + x + 2]$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha^2 - 1)x^3 + (\beta - 2)x^2 + 4x + 6]$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2 - \sin \alpha)x^3 + x^2 - 2x + 3]$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(|\eta \mu \theta| - |\theta|)x^2 + 5x + 6]$

1044. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha+1)x^3 + x + 3}{(\alpha-2)x^2 + x + 1}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha-2)x^2 + x - 3}{(\alpha+2)x^3 + \alpha x^2 + x + 5}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 3} - \alpha x \right)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha x^3 - 3x^2 + 1}{\alpha x^2 - x + 1} - \alpha x \right)$

1045. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 7} - \alpha x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \alpha x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 7} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \alpha x)$



1046. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \alpha x + \beta$

- Για $\alpha = 1, \beta = 0$ να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
- Αν $\beta = 0$, να υπολογίσετε τα όρια: $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $E = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β .

1047. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \alpha x + \beta) = 7$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3}{x^2 + 1} + \alpha x - \beta \right) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + 1}{x - 1} - \frac{\beta x^2 - 1}{x + 1} \right) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\alpha x^2 + x + 1} - \sqrt{\beta x^2 + 1}) = \frac{1}{4}$ με $\alpha, \beta > 0$

1048. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + \alpha x + \beta$ Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$

1049. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^2} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x^2 + \eta\mu x) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$



- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x + \sin x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

1050. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu^2 x}{x^4 + 1}$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + 1} - x) \eta \mu 3x]$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + \sin x)$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^5 + 4x + 1}{x^6 + 2x - 5} \cdot \eta \mu 4x \right)$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \cdot \sin \frac{2x + 1}{x^2 + 5} \right)$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

1051. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \eta \mu x}{2x - \sin x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt{x^2 + 9} - 3) \eta \mu \frac{3}{x^2} \right)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - \sqrt{x^2 + \eta \mu^2 x}}{x^2 + x^2 \sqrt{x^2 + \sin^2 x}}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + 2}{x^3 + x^2 \eta \mu \frac{2}{x} + 3}$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{2 + \eta \mu x}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{x+1} + 2 \eta \mu(x + 2)]$
- $Z = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + 2) - \sin^3(x - 1)]$

1052. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) \leq x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin x)$
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

1053. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:



- αν $f(x) \geq x^2 + ημx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- αν $f(x) \leq x - x^2 + συνx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

«Κατασκευαστικά»

Θεώρημα 5ο **Κριτήριο παρεμβολής.**

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

14. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_0 και τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ;

Απάντηση

Ισχύει ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η

ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

Τους αριθμούς $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε πλευρικά όρια της f στο x_0 και συγκεκριμένα αριστερό και δεξιό όριο της f αντίστοιχα.

16. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων ορίου στο x_0 .

α) **Θεώρημα 1°** (πρόσημο συναρτήσεων και όρια)

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

β) **Θεώρημα 2ο** (διάταξη και όρια)

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$

κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



γ) **Θεώρημα 3ο** (πράξεις συναρτήσεων και όρια)

Αν **υπάρχουν** τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ για κάθε σταθερά } \kappa \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\text{ισχύει και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, v \in \mathbb{N}^*$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

1054.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: 2+x-x^2 \leq f(x) \leq 2+x+x^2$, να βρεις $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

1

1055.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: 2x-x^2 \leq f(x) \leq 2x+x^2$, να βρεις

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 4x}{5f(x) + 3x}$$

$$2, \frac{8}{13}$$



1056.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: 2x-x^2 \leq f(x) \leq 2x+x^2$, να βρεις $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)+x}{f(x)+2x}$

5

4

1057.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = a$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)(\sqrt{x+1}-1) = \beta$, να υπολογίσεις το

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$$



0

1058. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $2\eta\mu x - x^3 \leq f(x) \leq x^3 + 2\eta\mu x$, να βρεις

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

0, 2

1059. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ώστε $f^2(x) + g^2(x) \leq 2xf(x)$, να βρεις τα όρια των συναρτήσεων

στο 0

0, 0

1060. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} [xf(x) + 2g(x)] = 6, \lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) - 2xg(x)] = 2$, να βρεις τα

όρια των συναρτήσεων στο 2

2, 1

1061. Δίνεται συνάρτηση f όπου $xf(x) \geq \eta\mu x$.

- Να βρεις το όριο της f στο 0. Επιπλέον
- να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x) - 2}{f(x) + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + 2\eta\mu x}{2x - 3\eta\mu x}$

1, 0, -3

1062. Αν $x^2 - x + 1 \leq xf(x) \leq x^2 + x + 1$ να υπολογίσεις τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \eta\mu x \right)$

+∞, 1, +∞

1063. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2\eta\mu x} = a, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2 + 3\sigma\upsilon\nu x} = \beta, \text{ να βρεις το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{a}{b}$$



1064. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2}{xf(x) - 5x^2 + 4} = ;$

$\frac{5}{2}$

1065. Αν $f(x) + 2f(-x) = x + 3 \Rightarrow f(x) = ;$

$f(x) = -x + 1$

1066. Αν $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = ;$

$f(x) = \frac{x^4 - 2}{3x^2} - \frac{2}{3}$

1067. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$, να βρεις $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1

1068. Να βρεις τις συναρτήσεις $f, g: f^2(x) + g^2(x) - 2xf(x) + 4g(x) = -4 - x^2$

$f(x) = x, g(x) = -2$

1069. Αν $f^3(x) - xf^2(x) - x^2f(x) = -x^2 \eta \mu x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = ;$

$a = \pm 1$

1070. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $1 - x^4 \leq f(x) \leq 1 + x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- β) $x + 2 < f(x) < x^2 + x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1071. Αν: $2 - |x - 1| \leq f(x) - 2x \leq x^2 - 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

1072. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $|f(x) - x + 2| \leq x^2 - 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.

1073. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ στις επόμενες περιπτώσεις:

- $|f(x) - (x - 3)^4| \leq (x - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $|f(x) - x^4| \leq (x - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1074. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $|f(x) - 2| \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R}$



- $(f(x) - 3)^2 \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

- $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-3}{x}$

- $B = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-3}{x}$

1075. Ένας συμμαθητής σας θέλει να υπολογίσει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και γνωρίζει ότι:

$2x\sqrt{2-x^2} \leq f(x) \leq x^4 - 3x^2 + 4, \quad x \in [-1,1]$ Γράφει στο τετράδιό του: «Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x\sqrt{2-x^2}) = 2 - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^4 - 3x^2 + 4) = 2$ Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.»

- Ποια παρατήρηση νομίζετε ότι θα του κάνει ο καθηγητής σας;
- Σε ποιο σημείο υπάρχει σύγχυση στη σκέψη του συμμαθητή σας; γ) Να υπολογίσετε σωστά το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

1076. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x \leq f(x) - 3 \leq x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να υπολογίσετε το $f(0)$.
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
- το $f(2)$,
- το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$,
- το όριο $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

1077. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4 \eta \mu \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$

- Να αποδείξετε ότι: $-x^4 \leq f(x) \leq x^4, \quad x \in \mathbb{R}^*$
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

1078. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει: $x^2 \eta \mu \frac{3}{x} \leq f(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta \mu \frac{3}{x} \right)$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



1079. Να αποδείξετε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^5 \eta \mu \frac{2}{x} \right) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^4 \sigma \upsilon \nu \frac{3}{x^2} \right) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + x \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + 1 + x^3 \eta \mu \frac{3}{x} \right) = 1$

1080. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $|g(x)| \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$

1081. Να βρείτε τις παραμέτρους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} x^3 + (\alpha + 1)x + \beta, & \text{αν } x < -1 \\ x^2 + 3\beta x - 4\alpha + 4\beta, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -4$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + \alpha^2 x - 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x \leq -1 \\ 3x + 1, & \text{αν } x \in (-1, 2) \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} + 2\alpha x + \beta, & \text{αν } x < 1 \\ \alpha\sqrt{x} + \beta x^2 + \beta x + 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$

1082. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x - 1} = 4$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 6}{x^2 - 1} = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x + \beta\sqrt{x} - 2}{x - 1} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (\alpha - 4)x - \alpha - \beta}{x^2 - x - 2} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^2 + 5x + 2\beta}{x^2 + 3x + 2} = 3$



1083. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(3x) - f(-x) \eta \mu 2x}{3x^2 - \eta \mu^2 x}$$

1084. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(5 + h) = 10$, να υπολογίσετε το $A = \lim_{x \rightarrow 5} (f(x) - 2)$.

1085. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$, να υπολογίσετε το: $B = \lim_{u \rightarrow 0} (f(3 + u) - 2)$

1086. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ όταν:

- $\lim_{h \rightarrow 0} (f(\alpha + h) - h^2 + h + 5) = 7$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = 5$

1087. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

1088. Έστω $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^6 - x^4}$.
- Αν $\sqrt[12]{x} = y$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^6 - y^4}$
- Να υπολογίσετε το όριο: $B = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

1089. Να υπολογίσετε το:

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(2x - 1) = 10$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(3x + 4) = 5$.

1090. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2023$

- Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = 2023$
- Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -2023$

1091. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(2x - 1) = 5$.

- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
- Αν η f είναι άρτια, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$



- Αν η f είναι περιττή, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + 3f(6-x))$

1092. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \ell$ Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) + 3f(6-x)) = 10$, να βρείτε το ℓ .

1093. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $f(x) = f(x+2)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 3$ τότε:

- να αποδείξετε ότι $f(2) = f(4)$,
- να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-2}{x-4}$.

1094. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$, να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} f(h+3)$
- $B = \lim_{h \rightarrow 1} f(3h)$

1095. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$, να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h}$

1096. Αν ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = 2$ να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}$

1097. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $(f(x) - 1)^2 \leq \eta \mu^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) + 2f(x) + \sigma \nu^2 x \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\eta \mu^2 x - x^2 \leq f^2(x) \leq \eta \mu^2 x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$
- $-\eta \mu^2 x \leq (f(x) - 1)^2 \leq 1 - \sigma \nu^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$

1098. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $2f(x)\eta \mu x + x^2 - 2\eta \mu^2 x \leq f^2(x) \leq x^2 + 2f(x)\eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

1099. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $x^2 + 2xf(x) \geq f^2(x) + \eta \mu^2 x \geq 2xf(x) + \eta \mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$



1100. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $2f(x) + \eta\mu x - x \leq f^2(x) + 1 \leq x^2 + 2f(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $x^2 f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \leq f(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$
- $\left| f(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R}^*$
- $(x + \eta\mu x)^2 \leq x^2 f(x) \leq 2(x^2 + \eta\mu^2 x), \quad x \in \mathbb{R}^*$

1101. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ και $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

1102. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ και $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(1) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ με } x_0 \neq 0$

1103. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 3x^2 - \eta\mu x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \cdot \eta\mu x} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sigma\upsilon\nu x}{x^2 + x} = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \eta\mu x}{x^4 + x} = 6$

1104. Αν ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \eta\mu x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{x^2 + 1} - 1)g(x)] = 5$ να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - x^4 g(x)}{f(x) + \eta\mu^2 x}$

1105. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x}{x} = 2$



- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + f(3x)}{x}$

- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(4x)}{x^2}$

- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{1 - \sin^2 x}$

- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{\eta \mu x}$

1106. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι: $|f(x)\eta \mu x - 3x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \eta \mu 2x}{xf(x) + \eta \mu x}$



«Περίεργα» όρια

2ος Κανόνας: de L'Hospital.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται απροσδιόριστες μορφές:

$$(+\infty) + (-\infty), 0 \cdot (\pm\infty), (+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

1107. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

0

1108. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$

1

1109. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$

+∞

1110. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

0

1111. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x$

+∞

1112. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

0

1113. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$

+∞

1114. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$

0

1115. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

0

Μορφή $0 \cdot \infty$: Πέτα τη μία συνάρτηση 'κάτω από την άλλη' οπότε θα δημιουργήσεις μορφή

$$\frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\infty}{\infty} \text{ και θα συνεχίσεις με}$$

DeL'Hospital.

 $\eta\mu(\pm\infty), \sigma\upsilon\nu(\pm\infty)$

- Αν εμφανίζονται σε πολ/μο ή διαίρεση βάλε απόλυτα και συνέχισε με κριτήριο παρεμβολής
- Αν εμφανίζονται σε πρόσθεση ή αφαίρεση βγάλε κοινό παράγοντα για να δημιουργήσεις πολ/μο ή διαίρεση.

Μορφή

$$\frac{\infty}{0} = \text{σπάσιμο} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$$

Μορφές 0^0 ή ∞^∞ : Κάνε χρήση της ιδιότητας ΒΛ $a = e^{\ln a}$



1116. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x}$

0

1117. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x}$

$-\infty$

1118. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x$

$-\infty$

1119. $\lim_{x \rightarrow 0} x - e^x$

-1

1120. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^x$

$-\infty$

1121. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$

$+\infty$

1122. $\lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x$

$+\infty$

1123. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 - e^x$

$-\infty$

1124. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 - e^x$

$-\infty$

1125. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x$

$+\infty$

1126. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

1

1127. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2 + x + 3}$

0

1128. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3 - 3}$

0

Να υπολογίσεις τα όρια :

1129. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \eta\mu \frac{1}{x^2}$

0

1130. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \eta\mu \frac{1}{x^2}$

Απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$

- Κάνε συζυγή αν έχεις άρρητη συνάρτηση .Προσοχή αν δε μπορείς να κάνεις συζυγή ίσως να χρειαστεί να προσθαφαιρέσεις χ.
- Βγάλε κοινό παράγοντα δύναμη του χ ή e^x ή $\ln x$. Στα επιμέρους κλάσματα θα χρειαστείς Del Hospital .

Μορφή $0 \bullet \infty$: Πέτα τη μία συνάρτηση 'κάτω από την άλλη' οπότε θα δημιουργήσεις μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ και θα συνεχίσεις με DelHospital.



$+\infty$

1131. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4 + 2\sigma\upsilon\nu x$

$-\infty$

Να υπολογίσεις τα όρια :

1132. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{2}{x}$

0

1133. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\eta\mu 3x}{x^2 + 3}$

0

1134. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 2 - \sigma\upsilon\nu x$

$+\infty$

1135. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu 3x + \frac{x^5 + 4}{x - 2}$

$+\infty$

1136. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 + 7\eta\mu x - 2x$

$-\infty$

1137. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x|}{x - 2}$

$\emptyset$

1138. $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x \eta\mu \frac{1}{x}$

0

1139. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x \eta\mu \frac{1}{x}$

0

1140. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu x \eta\mu \frac{1}{x}$

1141. Να υπολογίσεις το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\eta\mu \frac{1}{x}$

1

1142. Να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{2x^3 + x + 1}$



0

1143. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}{2x^2 + 3x + 1}$

 $\frac{1}{2}$

1144. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x + 3}{\ln^4 x - 2 \ln x + 1}$

1

1145. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + \eta \mu x) - 2 \ln x$

0



Όρια εκθετικά-λογαριθμικά

Να υπολογίσεις τα εκθετικά όρια :

1146. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x^2-3}{1-x}}$

0

1147. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{x^2+3}+x}$

1

1148. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x+2} - 5^x - 4}{5^x + 1}$

24

1149. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^x + 9^x}{2 \cdot 4^x + 5^x}$

+∞

1150. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x + 9^x}{2 \cdot 4^x + 5^x}$

+∞

1151. Να υπολογίσεις : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3}{3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3}$

 $-\frac{1}{2}$

1152. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{2x+1} - 2^x - 1}{3 \cdot 4^x - 2^{x+2} + 1}$

1

1153. Να υπολογίσεις : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 2^{x+1} - 2 \cdot 5^x + 3}{e^{x+2} + 4^x}$

+∞

1154. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x+1} - 5^{3x+2}}{3^{2x+1} + 2^{3x+2}}$

-∞

1155. Να βρεις για κάθε θετική τιμή του α το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x - 2013^x}{a^x + 2013^x}$

Μορφή $a^{\pm\infty}$

- $a^{+\infty}$ με $a > 1$ δίνει $+\infty$
- $a^{+\infty}$ με $a < 1$ δίνει 0
- $a^{-\infty}$ με $a > 1$ δίνει 0
- $a^{-\infty}$ με $a < 1$ δίνει $+\infty$

Εκθετικά όρια στο $\pm\infty$

- Στο $+\infty$ βγάλε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη εκθετική
- Στο $-\infty$ βγάλε κοινό παράγοντα τη μικρότερη εκθετική

 $\pm 1,0$

1156. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2),$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} - 1)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 3),$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - e^{-x})$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2}}{4^{x-3}},$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x-1}}{3^{x+2}}$

1157. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x,$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x,$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x$
- $E = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x},$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{-x}$

1158. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{3^x},$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x}{9^x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2x}}{2^{-x}},$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{3x}}{5^{3x}}$

1159. Να υπολογίσετε τα όρια:



- $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}},$
- $B = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow e} e^{\frac{1}{x-e}},$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}},$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 2} e^{-\frac{1}{|x-2|}}$

1160. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 3^x + 4^x - 6$ και $g(x) = 3^x - 4^x + 2$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x),$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

1161. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2^x + 3^x - 4}{3^x + 5^x + 2}$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3^x - 4),$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 5^x + 2)$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1162. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2^x + 3^{x+4}}{2^{x-3} + 1}$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1163. Να υπολογίσετε τα όρια:



- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+4}}{3^{x+2}},$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{2^{x+3}}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3^x}}{3^{x+5^x}},$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{x+3} - 3^x}{5^{x+7^x}}$
- $E = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^{x+3} - 3^x}{5^{x+7^x}},$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+2} + 2^x}{3^{x-2} - 2^x}$

1164. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3}}{3^{x+1}},$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+4}}{4^{x+2}}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 e^x},$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 4^x}{x^2 + x + 1}$

1165. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{a^x - 2^{x+1}}{a^{x+1} + 2^x}, \quad a > 0$

- Για $a = 3$ να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Να υπολογίσετε τα όρια: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του a .



Λογαριθμικά όρια στο $\pm\infty$: Απλά εφάρμοσε ιδιότητες λογαρίθμων της ΒΛ.

Να υπολογίσεις τα λογαριθμικά όρια :

1166. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln \sqrt{x^2 + 2x + 3})$

0

1167. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln x}{4 \ln^3 x + \ln^2 x + 1}$

0

1168. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{x+2} + 3) - x - 2)$

0

1169. Να υπολογίσεις το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{k^{3x} + e^{3x}}{e^{2x}} - x$ για τις διάφορες τιμές του k

0, $\ln 2$, $+\infty$

1170. Να υπολογίσετε τα όρια:

• $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \log x),$

• $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + \log x)$

• $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x + 3},$

• $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + \ln x}$

1171. Να υπολογίσετε τα όρια:

• $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 3),$

• $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{-x} + 1)$

• $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2 + 3)]$



- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2^{-x} + 3^{-x} + 2)$

1172. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + 2^x) - \ln(1 + 3^x)]$

- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1 + e^x)]$

1173. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

- Να υπολογίσετε τα όρια: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1174. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\ln^2 x + 3\ln x + 2}{2\ln^2 x + \ln x - 1}$

- $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10\ln^4 x + 5\ln^2 x + 2}{2\ln x + 3}$

1175. Αν είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^4 + x^2 + 1)f(x)] = 2022$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1176. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} = 7$ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1177. Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - \sqrt{x})g(x)] = 5 \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)).$$

1178. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$|(2 + x^4)f(x) - 3x^4| \leq x^2 + 1 \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xf(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 3$

Να βρεις τα όρια

1179. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 3x| + 2x}{x^2 - 5x + 6}$



1180. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2| - |3-x| + 1}{x-7}$

0

1181. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x - 2)$

$+\infty$

1182. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 - 2 + \left(\frac{3}{4} \right)^x \right]$

$+\infty$

1183. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4}{5} x^3 - \left(\frac{4}{5} \right)^x \right]$

$-\infty$

1184. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+3}}{2x + \eta\mu x}$

0

1185. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x+3} - 2x$

1

1186. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{4x^2+x+2}$

$\frac{3}{4}$

1187. Δίνεται το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2f(x) + \frac{3}{x} \eta\mu x}{\sqrt{x^2+x+1} - x} \right] = 5$, να βρεις το όριο της $f(x)$

1188. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2-2})^{10} + (x - \sqrt{x^2-2})^{10}}{x^{10}}$

2^{10}

1189. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}}$



$$\frac{1}{2}, \pm\infty$$

Λέω να «θέσω»

1190. Av $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 + 7x - 2) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ;$

$$-3$$

1191. Av $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x+1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{3x+1} = ;$

$$2$$

1192. Av $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x^2 = 1 \Rightarrow$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ;$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = ;$

$$+\infty, 2$$

1193. Av $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + x}{f(x) + 4x} = 9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = ;$

$$-5$$

1194. Av $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{4x^2 + x}) = 2012 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = ;$

$$2$$

1195. Av $\lim_{x \rightarrow 2011} (f^2(x) - 2f(x)) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2011} f(x) = ;$

$$1$$

1196. Av $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x^3 - 1} = 2$, να βρεις

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

$$1, 7$$



1197. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x - 5) = 0$, να υπολογίσεις τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 f(x) - 3x^6 + 2x - 3)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 f(x) + 5x^5 + 1}{x^5 f(x) - 3x^6 + 2x - 3}$

$+\infty, 5, 3, +\infty, \frac{8}{5}$

1198. Να βρεις το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) + \sqrt{x^2 + x + 1} - x] = 4$

1199. Δίνεται συνάρτηση f όπου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{f(x) + 2} = +\infty$, να βρεις το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

-2

1200. Δίνεται η συνάρτηση f : $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2x^2 + x - 3] = 5$, να υπολογίσεις

- το όριο της f στο 1 και
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 2}{2f(x) - 3}$



1201. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x) + g^2(x) - 2f(x) + 4g(x)) = -5$, να βρεις $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$1, -2$

1202. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + x^2 - x + 2 = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} =$;

2



1203. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{2 - f(x)}}{\sqrt{f(x)} - 1} = ;$

3

1204. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x^2 - 1} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 1} = ;$

 $\frac{11}{2}$

1205. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} + 1} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x - 1} = ;$

0

1206. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + x^2 + 1) f(x) = 2012 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ;$

1207. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ;$

1208. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x) f(x) - x^2 + 16}{2 - \sqrt{x}} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = ;$

 $-\frac{27}{4}$

1209. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - x^2}{x + \eta\mu 3x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = ;$

12

1210. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 5x + 6} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3x}{x - 3} = ;$

7

1211. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 8}{\sqrt{f(x)} + 12 - 4} = ;$

1212. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 3} [3f(x) - 2g(x)] = 5, \lim_{x \rightarrow 3} [8f(x) - 5g(x)] = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ; \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = ;$

-17, -28

1213. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow 2} [4f(x) - f^2(x)] = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ;$

2

1214. $\text{Av } \text{ισχύει } f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ;$

1



1215. Αν $f(x-4) = f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x)-1}{x-7} =$;

4

1216. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [f(x-2) + f(2-x)] =$;

1217. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2+3x)}{2x^2-3x} =$;

-2

1218. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{f(x)} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(27x)}{f(x)} =$;

64

1219. Αν f άρτια, g περιττή και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3, \lim_{x \rightarrow 2} g(x)(\sqrt{x+2}-2) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)] =$;

-24

A1. Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

A2. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να δείξετε

ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0) \neq 0$

Απόδειξη

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0.$$

17. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0 ;

Απάντηση



Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$