

Συναρτήσεις

Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
211 ασκήσεις
και τεχνικές
σε 36 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Τα πάντα για τις
συναρτήσεις

Ορισμός και ισότητα συναρτήσεων

kglykos.gr

Ορισμοί από τα παλιά ...

Πεδίο ορισμού : A_f

Σύνολο τιμών : $f(A)$

$f = g \Leftrightarrow A_f = A_g \text{ και } f(x) = g(x)$

f άρτια $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

f περιττή $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

f περιοδική $\Leftrightarrow f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

f τέμνει $xx' \Leftrightarrow f(x) = 0$

f τέμνει $yy' \Leftrightarrow \text{όπου } y = 0$

f βρίσκεται πάνω από $xx' \Leftrightarrow f(x) > 0$

f τέμνει $g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

f βρίσκεται κάτω από $g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$



Πεδία ορισμού :

- $f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow g(x) \geq 0$
- $f(x) = \ln(g(x)) \rightarrow g(x) > 0$
- $f(x) = \frac{1}{g(x)} \rightarrow g(x) \neq 0$

Προσοχή : μη ξεχνάς ότι εφχ, σφχ
είναι κλάσματα

Πράξεις συναρτήσεων : Βρες το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης
 A_f, A_g οπότε $A = A_f \cap A_g$. Ο αντίστοιχος τύπος θα είναι η

αντίστοιχη πράξη των τύπων τους. Προσοχή στη συνάρτηση $\frac{f}{g}$
θα πρέπει στο πεδίο ορισμού να λάβεις υπόψη ότι $g(x) \neq 0$

7. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.



673. Να εξετάσεις αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Αν όχι να βρεις το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο

οποίο θα μπορούσαν να είναι ίσες : $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}, g(x) = \frac{x - 2}{x - 1}$

674. Να εξετάσεις αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Αν όχι να βρεις το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο

οποίο θα μπορούσαν να είναι ίσες : $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = x$

675. Να εξετάσεις αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Αν όχι να βρεις το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο

οποίο θα μπορούσαν να είναι ίσες : $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}, g(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}$

676. Να βρεις τα διαστήματα στα οποία είναι ίσες : $f(x) = |x-1| + 2|x+1| + x, g(x) = 2x+3$

$[-1, 1]$

677. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες, όπου:

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ και $g(x) = |x - 1|$
- $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$

678. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν $f \neq g$, σε ποιο σύνολο A είναι $f = g$;

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x) = x+1$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ και $g(x) = x+3$
- $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+5|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{5}{|x|}$
- $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 3$

679. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι ίσες. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

- $f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}, g(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$
- $f(x) = \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x-3}, g(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$
- $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, g(x) = \sqrt[3]{x^2}$
- $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}}, g(x) = \sqrt{x-2}$



680. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες.

- $f(x) = \ln x^4, g(x) = 4\ln|x|$
- $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x^2+2}, g(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x^2+2)$
- $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, g(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$
- $f(x) = \frac{e^{2x}-xe^x}{xe^x}, g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$

Πράξεις κλαδωτών συναρτήσεων :
Κάνε όλους τους συνδυασμούς
μεταξύ των κλάδων .Θα ορίσουμε
3 νέα διαστήματα

8. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f, g ;

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

681. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x+2}{x-1}, g(x) = \frac{x-1}{x+2}$, να ορίσεις τη συνάρτηση $3f+2g$

682. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x+3}{x-2}, g(x) = \frac{x-4}{x+5}$, να ορίσεις τη συνάρτηση $2f-3g$

683. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, g(x) = \frac{x-3}{x+4}$, να ορίσεις τη συνάρτηση $f \cdot g$

684. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x+2}{x-1}, g(x) = \frac{x-3}{x+2}$, να ορίσεις τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$

685. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{x^2-4}$, να ορίσεις τη συνάρτηση fg ;

686. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{x^2-4}$, να ορίσεις τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$;

687. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & 0 \leq x < 4 \\ 2x + 5, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & -3 \leq x < 3 \\ x - 4, & 3 \leq x \leq 15 \end{cases} \Rightarrow f - g = ;$



$$(f-g)_{(x)} = \begin{cases} -3x, 0 < x < 3 \\ x^2 - 2x + 5, 3 \leq x \leq 4 \\ x + 9, 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

688. Δίνονται $f(x) = \frac{(a+1)x-2a}{x-a+1}$, $g(x) = \frac{2-a-x}{x+a^2-1}$, $f=g \Rightarrow a=;$

2

689. Έστω $f, g: (f+g)_{(x)}^2 + 8 \leq f(x)(g(x)+4) + g(x)(f(x)+4) \Rightarrow f=g$

2

690. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: g(x) = f^2(3^x) - 2f(x^3) + 10$, ν.δ.ο. η g δεν είναι η μηδενική συνάρτηση

691. Έστω συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (a-1)x, x \leq -1 \\ -x+1, x > -1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρεις το a όταν διέρχεται από $A(a, a)$

$$\frac{1}{2}$$

692. Ν.δ.ο. η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ έχει κέντρο συμμετρίας

Περίττη

693. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x-1$ και $g(x) = x^2 + 3x - 4$ Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad \text{και} \quad \frac{g}{f}$$

694. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x-2$

- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .
- Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad \frac{g}{f}$
- Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

695. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \leq 2 \\ -x^2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.

696. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x-3$, Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad \text{και} \quad \frac{g}{f}$$



697. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3} \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 1$

698. Αν $3f(x) - 5f(-x) = 2x^2 + 24x + 4$ τότε με τι ισούται το άθροισμα των συντελεστών της $f(x)$

0

699. Αν $f(x) = ax + b$, $f \circ f(x) = f(x) + ab \Rightarrow a, b =$

 $a = 0, 1$

700. Αν $f(x) = \frac{a(2ax+1)}{x-a+2}$, $g(x) = \frac{(3a-1)x+a}{x+a}$, $f = g \Rightarrow a =$

1

701. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να βρεθεί η σύνθεση της f με τη g

 $A = \emptyset$

702. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να βρεθεί η σύνθεση της g με την f

 $A = [2, +\infty)$

703. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να βρεθεί η σύνθεση της g με τον εαυτό της

 $A = [6, +\infty)$

704. Αν $g(3) = -3$, f περιττή συνάρτηση και $h(x+1) = \frac{f(g(x))}{f(x)} \Rightarrow h(4) =$

-1

705. Δίνεται η συνάρτηση $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$

 $[4, 7]$

706. Αν $f(x^2 + x) = 2x^2 + 2x + 2 \Rightarrow f(x) =$

 $f(x) = 2x + 2$

707. Έστω η συνάρτηση $2f(x) + f(1-x) = 4f(0) - x \Rightarrow f(x) =$

 $f(x) = -x + 1$

708. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < \alpha \\ 2x+1, & x \geq \alpha \end{cases}$ να βρεις το α ώστε $f(\alpha^2 + 1) = 2af(\alpha - 2) + f(\alpha + 3) - 6$

1

709. Έστω οι συναρτήσεις $(f(x) + g(x))^2 - 2(f(x) + 1)(g(x) + 1) + 4 = 0 \Rightarrow f = g$



1

710. Αν $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 1 \\ -x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ να βρεις την τιμή της παράστασης $(f+g)_{(2)} + (fg)_{(0)}$

-1

Σχετική θέση συναρτήσεων

Σχετική θέση συναρτήσεων f, g :
 Όρισε τη συνάρτηση
 $h(x) = f(x) - g(x)$ και κάνε
 τον πίνακα πρόσημων της h .

711. Να βρεις τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$$

$$(\pm 1, 0), (-4, 0), (0, -4)$$

712. Να βρεις τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες : $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$$(0, 1)$$

713. Να βρεις τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες :

$$h(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in [0, 2\pi]$$

$$\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right), (0, 1)$$

714. Να βρεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από xx'

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(-2, 1) \cup (3, +\infty)$$

715. Να βρεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από xx'

$$g(x) = x^2 - 2|x| - 3$$

$$(\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

716. Να βρεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από xx'

$$h(x) = \ln(x^2 - x) - \ln(x + 3)$$

$$(-3, -1) \cup (3, +\infty)$$

717. Να βρεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική της g :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1, g(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$(0, 2) \cup (3, +\infty)$$



718. Να βρεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική της g :

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

719. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x^2 + bx + 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $A(1, -1)$, $B\left(2, -\frac{4}{7}\right)$ τα σημεία από τα οποία διέρχεται .

- Να βρεις a , b ,
- τα σημεία που τέμνει άξονες,
- τα x για τα οποία βρίσκεται πάνω από τον $x\chi'$
- τα σημεία τομής με την ευθεία $y = 1$.

$$a = -4, b = 1, (0, 0), (4, 0), (\infty, 0) \cup (4, +\infty), \left(-\frac{1}{5}, 1\right)$$



Σύνθεση συναρτήσεων

Σύνθεση συναρτήσεων f με g :

$$g \circ f \quad A_{g \circ f} = \{x \in A_f : f(x) \in A_g\}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

9. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

720. Δίνονται $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$, $g(x) = \frac{3}{x+2}$, να βρεις $f \circ g$;

$$A = \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{7}{5} \right\}$$

721. Δίνεται $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$, να βρεις $f \circ f$;

$$A = \mathbb{R} - \left\{ 5, \frac{26}{3} \right\}$$

722. Δίνονται $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$, $g(x) = \frac{3}{x+2}$, να βρεις $g \circ f$;

$$A = \mathbb{R} - \left\{ 5, \frac{9}{4} \right\}$$

723. Δίνεται $g(x) = \frac{3}{x+2}$, να βρεις $g \circ g$;

724. Έστω $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{6-2x}$, να βρεις $f \circ g$;

$$A = (-\infty, 1]$$

725. Έστω $f(x) = \sqrt{x-2}$, να βρεις $f \circ f$;

$$A = [6, +\infty)$$

726. Έστω $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{6-2x}$, να βρεις $g \circ f$;

727. Έστω $g(x) = \sqrt{6-2x}$, να βρεις $g \circ g$;

$$A = \left[-\frac{3}{2}, 3 \right]$$



728. Έστω $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$, να βρεις $f \circ g$;

729. Έστω $f(x) = \frac{x}{x+1}$, να βρεις $f \circ f$;

730. Έστω $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$, να βρεις $g \circ f$;

$$A = (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right)$$

731. Έστω $g(x) = \sqrt{x+4}$, να βρεις $g \circ g$;

732. Δίνεται η συνάρτηση: $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(2x-6)$, να βρεις το πεδίο ορισμού της g

$$[1, 5]$$

733. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - ax + b - 1$, $g(x) = x + b$, $(f \circ g)(x) = x^2 + x - 4 \Rightarrow a, b$;

$$a = 5, b = 3 \text{ και } a = -3, b = -1$$

734. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1+x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $h(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow (f \circ g \circ h)(x) =$;

735. Αν $f(x) = x - 4\sqrt{x+4} \Rightarrow f \circ f$;

736. Δίνονται $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow f \circ g$;

737. Ν.δ.ο. αν f, g περιττές τότε $g \circ f$ περιττή

738. Ν.δ.ο. αν f άρτια τότε $g \circ f$ άρτια

739. Ν.δ.ο. αν f περιττή και g άρτια τότε $g \circ f$ άρτια

740. Ν.δ.ο. αν f περιττή και $g \circ f$ περιττή τότε g περιττή

741. Δίνεται $f: (f \circ f)(x) = 5x - 4 \Rightarrow f(1) =$;

$$1$$

742. Αν $f \circ g(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = x + 4 \Rightarrow f(x) =$;

$$f(x) = 2x^2 - 21x + 53$$

743. Αν $f \circ g(x) = 4x^2 + 6x - 2$, $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow g(x) =$;

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

744. Αν $f(2x-5) = 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f(x) =$;

$$2x^2 + 18x + 43$$



Όπου εμφανίζονται σχέσεις της μορφής $f \circ f(x)$, $f \circ f \circ f(x)$ και ζητείται το $f(x_1)$ τότε συνήθως φοράω άλλο ένα f στη σχέση ή όπου x βάζω το $f(x_1)$

Συναρτησιακές σχέσεις: $f(x+y)$

- $f(0)$: βάζω όπου $x=y=0$
- για άρτια ή περιττή βάζω $\psi = -x$ ή όπου x το $-x, \psi = 0$
- για σχέση με έναν άγνωστο $\psi = 0$ ή $x = 0$ ή $x = \psi = x/2$

Συναρτησιακές σχέσεις: $f(xy)$

- $f(1)$: βάζω όπου $x=y=1$
- για σχέση με έναν άγνωστο $\psi = 1$ ή $\psi = 1/x$

Συναρτησιακές σχέσεις με

$f(a-x), f(b+x)$

- συνήθως θέτω όπου x το $a-\beta-x$ και σύστημα



745. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) - f(y)$

- Ν.δ.ο. διέρχεται από αρχή αξόνων ,
- είναι άρτια και
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$,
- ν.δ.ο. η συνάρτηση είναι η μηδενική

746. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+y) = xf(y) - yf(x)$.Ν.δ.ο.

- η συνάρτηση διέρχεται από αρχή αξόνων και
- έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

747. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, ν.δ.ο.

- διέρχεται από το $A(1,0)$ και

- $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

748. Να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων f και g στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x - 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$

749. Να ορίσετε τη σύνθεση $f \circ g$ των συναρτήσεων f και g στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = 5 - x^2$
- $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$

750. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \frac{x}{x-4}$ και $g(x) = x^2 - x + 2$
- $f(x) = \sqrt{8+2x-x^2}$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

751. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ και $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$
- $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = \sqrt{1-|x-3|}$

752. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in D_f$.



753. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ και $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

754. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 2x + 3$ με $x \in [-3, 1]$ και $g(x) = x + 2$ με $x \in [-2, 3]$

- Να ορίσετε τις $g \circ f$ και $f \circ g$.
- Ποιο γενικό συμπέρασμα επαληθεύεται;

755. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Δ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $g(x) = x^2 - 3$ και $\Delta = [-2, 1]$
- $g(x) = x^3 + x - 3$ και $\Delta = [7, 27]$

756. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = 3x + 1$ και $g(x) = x + 3$. Να λύσετε την εξίσωση:
 $(g \circ f \circ f)(x) = (f \circ g \circ g)(x)$

757. Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 2x + 5$ και $g(x) = 2x - 3$
- $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

758. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(x-1)$
- $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

759. Να εξετάσετε αν ορίζονται οι παρακάτω συνθέσεις:

- Η $g \circ f$, όταν $f(x) = -e^x$ και $g(x) = \ln x$.
- Η $f \circ g$, όταν $f(x) = \ln(-x)$ και $g(x) = e^x + 1$.

760. Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $(g \circ f)(x) = e^{x+1} + 3$, $g(x) = x + 3$
- $(g \circ f)(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$, $g(x) = \ln x - 1$
- $f(\ln(g(x))) = x^2 - 3$, $g(x) = x + 2$



761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Να αποδείξετε ότι:

- η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$,
- αν $g(x) = -x$, τότε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $-f$ είναι ίσες.

762. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f = g$.

763. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- Αν η g είναι άρτια, τότε και η $f \circ g$ είναι άρτια.
- Αν οι f και g είναι περιττές, τότε και οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι περιττές.
- Αν η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, τότε οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι άρτιες.

764. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(1)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $(f \circ f)(x) = 3x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$
- $(f \circ f \circ f)(x) = 4x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$

765. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(a)$ όταν:

- $(f \circ f \circ f)(x) = 3x - 2$ και $a = 1$
- $(f \circ f \circ f)(x) = x^2 - 3x + 4$ και $a = 2$

766. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) = x^5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(x^5) = f^5(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

767. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(2) = 2$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

768. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x - 1$ και $g(x) = x + 1$. Να βρείτε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $(h \circ f)(x) + 3 \leq (f + g)(x) \leq (h \circ g)(x) - 1$

769. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x + y) \geq f(x) + f(y) \geq x + y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων,



- η f είναι περιττή συνάρτηση,
- ο τύπος της f είναι $f(x) = x$.

770. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) = 4 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(2) = 2$,
- η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,
- $f(x) + f(4 - x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $M(2, 2)$.

771. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 2x + \alpha$ και $g(x) = 3x + 2\alpha$

- Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f \circ g$ και $g \circ f$
- Να εξετάσετε αν ισχύει: $f \circ g = g \circ f$
- Να αποδείξετε ότι αν οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$, τότε: $\alpha = -1$

772. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^2 + 2x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}, g(x) = x + 1, h(x) = x + 2$

- Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$.
- Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.
- Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ h$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης $C_{\frac{f}{g}}$ με τον άξονα $x'x$.



1-1

12. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **1-1**;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση **1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Σχόλια

α) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση **1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

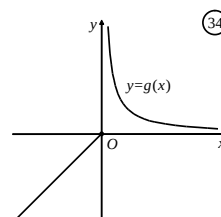
β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι **1-1**, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.**
- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη**, τότε είναι συνάρτηση "**1-1**". Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι **1-1** αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση ή συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ (Σχ. 34) είναι **1-1**, αλλά δεν είναι

γνησίως μονότονη.



773. Να εξετάσεις αν είναι 1-1: $f(x) = \sqrt{x+5}$

774. Να εξετάσεις αν είναι 1-1: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

775. Να εξετάσεις αν είναι 1-1: $f(x) = e^{-x} - \ln x$

776. Να εξετάσεις αν είναι 1-1: $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 4$

«1-1»: μπορείς να αποδείξεις ένα από τα επόμενα

- $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ (μην το χρησιμοποι)
- $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$
- Ν.δ.ο. η f είναι γνησίως μονότονη: $f'(x)$ κ.τ.λ.
- Σε σχήμα θα πρέπει φέρνοντας οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία να τέμνεις το πολύ σε ένα σημείο
- Σε κλαδωτή συνάρτηση αποδεικνύουμε ότι είναι 1-1 κάθε κλάδος και μετά θα πρέπει τα σύνολα τιμών των κλάδων να μην έχουν κοινά σημεία.

Ν.δ.ο. η συνάρτηση δεν είναι «1-1»:

απέδειξε ότι δεν ισχύει ένα από τα παραπάνω ή βρες 2 τιμές για το x όπου δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.



777. Να εξετάσεις αν είναι 1-1 : $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$

778. Να εξετάσεις αν είναι 1-1 : $f(x) = 5x^3 + 2x + 1$

779. Να εξετάσεις αν είναι 1-1 η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5, & x \leq 3 \\ \frac{x+5}{2}, & x > 3 \end{cases}$

780. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \circ f(x) = f(x) + x - 1$

- Ν.δ.ο. αντιστρέφεται και
- Να βρεις το $f(1)$

1

781. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^3(x) + 4f(x) = 2x + 3$

- Ν.δ.ο. αντιστρέφεται και
- Να βρεις το $f(1)$

1

782. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$

- Ν.δ.ο. είναι αντιστρέψιμη και
- να λύσεις την εξίσωση : $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$

 $x = 1$

783. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^2(x) + 1 = 2f(x^3)$, ν.δ.ο. δεν είναι αντιστρέψιμη

784. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \circ f \circ f(x) = 5x - 12$

- Ν.δ. ο. αντιστρέφεται,
- Να βρεις το $f(3)$
- Ν.δ.ο. $g(x) = (x^2 - 3x + 1)^{2015} + xf(x) - 3x + 4$ δεν είναι αντιστρέψιμη

3

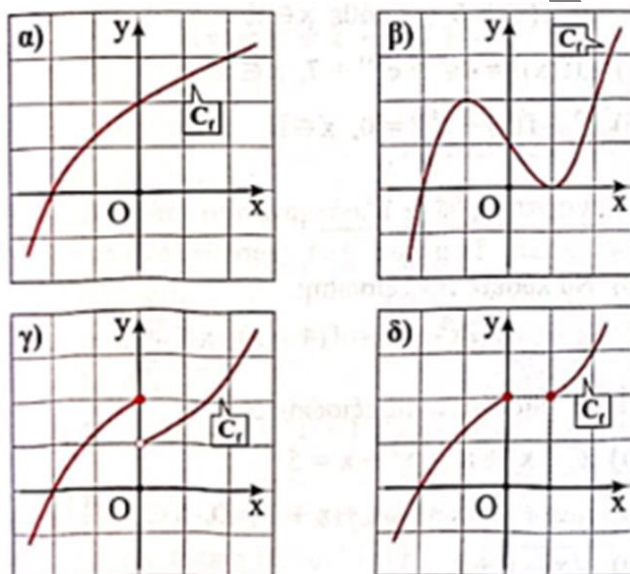
785. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1 - 1".

- $f(x) = 5x - 7$
- $f(x) = \frac{3}{x}$
- $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$



- $f(x) = (x - 1)^3 - 2$
- $f(x) = \sqrt{3 - x} + 5$
- $f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad x \geq 2$
- $f(x) = x^2 - 6x + 10, \quad x \geq 3$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

786. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ανήκουν σε συναρτήσεις που είναι "1 - 1".



787. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1 - 1".

- $f(x) = x^3 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{x} - x + 2, \quad x \geq 0$
- $f(x) = \sqrt{x - 1} + x + 1, \quad x \geq 1$
- $f(x) = (x - 1)^5 + x^3 + x + 1$
- $f(x) = x^3 - \frac{1}{x-2} + 1, \quad x > 2$

788. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι "1 - 1".



- $f(x) = (x - 1)(x + 3) + 2$
- $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
- $f(x) = x^{2008} - x^{2006} + x^2 + 1$
- $f(x) = (x - 2014)^2(x - 2016)^3 + 1$
- $f(x) = \eta\mu x + \eta\mu 3x + 2$

789. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1 - 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(f(x)) = x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$
- $g(f(x)) = x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^3(x) + 2f(x) = 2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^5(x) - 3f^3(x) = x^7, \quad x \in \mathbb{R}$

790. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1 - 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(f(x)) = x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(f \circ f)(x) + f^{2007}(x) = x^{2007}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(g \circ f)(x) = x^3 + 3f(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

791. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι "1 - 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(f(x)) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(f(x)) = x^2 - x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) + 2f(x^2) + 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

792. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 - 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(f(x)) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(f(x)) = e^x + f^5(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x - \ln f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ με } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$
- $f(f(x)) = x + f(x), \quad x \in \mathbb{R}$



- $g(f(x)) = 2x^3 + e^{f(x)} + 5, \quad x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

793. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι “1 - 1”.

- $f(x) = 5e^{2x-3} + 2$
- $f(x) = 2e^{1-x} + 1$
- $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$
- $f(x) = 3\ln(x - 1) + 12$
- $f(x) = 2\ln(3 - x) - 1$
- $f(x) = \ln \frac{1 - e^x}{e^x}$

794. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι “1 - 1”.

- $f(x) = e^x + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \ln x + x + 2, \quad x > 0$
- $f(x) = 2 - x - x^3 - \ln x, \quad x > 0$
- $f(x) = e^x + x^3 + x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$
- $f(x) = e^x + \ln x - \frac{1}{x} + 1, \quad x > 0$

795. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι “1 - 1”.

- $f(x) = (e^x - 1)(x - 2) - 1$
- $f(x) = (x - 2)(\ln x - 1) + 1$

796. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 - 1” στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(f(x)) = e^x + f^3(x), \quad x \in \mathbb{R}$



- $f(x) = 2x - \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g(f(x)) = 4x^3 + e^{f(x)} + 7$, $x \in \mathbb{R}$
- $x^5 + f(x) + e^{f(x)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$

797. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(2 - x) = f(x - 4)$
- $f(x^2 - 3) = f(1)$
- $f(x^3 + x) = f(2)$
- $f(2x^3 + 4) = f(1 + x^2)$

798. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + x^3 + 2x - 4 = 0$.

799. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$

800. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x = 5$
- $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + \epsilon\phi x + x + 1 = 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$
- $\sqrt{x-1} + x = 3$
- $\sqrt{x} = \frac{2}{x} - 1$

801. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(e^x + 2) = f(3)$
- $f(\ln x + 1) = f(2)$
- $f(e^x + 3) = f(5)$



- $f(\ln^2 x) = f(\ln x)$

802. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 - 1”.
- Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$.

803. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x + (\alpha - 1)x - 2\alpha + 1$ ($0 < \alpha \neq 1$)

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

804. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2 - x - \ln x$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.

805. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 - 1”.
- Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$

806. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left(\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right)$

807. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $(f \circ g)(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση: $g(4^x - 2^{x+1} + 4) = g(2^{x+2} - 4)$

808. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $e^{x-1} + \ln x + x = 2$
- $e^{2-x} - x = -1$

809. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- αν οι f, g είναι “1 - 1”, τότε η $f \circ g$ και η $g \circ f$ είναι “1 - 1”,



- αν η $f \circ g$ είναι “1 - 1”, τότε και η g είναι “1 - 1”,
- αν είναι $(f \circ f)(x) = xf(x)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι “1 - 1”.

810. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι “1 - 1”, να αποδείξετε ότι:

- η f είναι “1 - 1”,
- η g είναι “1 - 1”.

811. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\beta \neq 0$ και οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε:

$(g \circ g)(x) = \alpha g(x) + \beta f(x^3 + x + 2004)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι “1 - 1”, να αποδείξετε ότι και η g είναι “1 - 1”.

812. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(1) = 1$,
- η συνάρτηση: $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι “1 - 1”.

813. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι “1 - 1” και ικανοποιεί τη σχέση: $2f(x^4) - f^2(x^2) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Αντίστροφη συνάρτηση

Αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$:

- Αποδεικνύεις ότι είναι 1-1
- Θέτω $f(x)=y$ και λύνω ως προς x
- Αλλάζω το x με το y
- Το νέο y είναι η $f^{-1}(x)$
- Το νου σου :το σύνολο τιμών $f(A)=A_{f^{-1}}$

13. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

Απάντηση

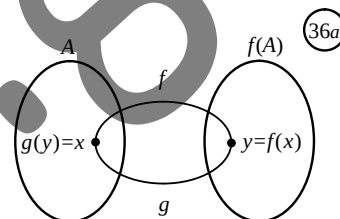
Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι 1-1. Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f , $f(A)$, υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Έτσι, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} και για την οποία ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι: $f^{-1}(f(x))=x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y))=y$, $y \in f(A)$.

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f , και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη C_f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:



Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

814. Να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει: $f(x)=x^3+2$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2}, & x \geq 2 \\ \sqrt[3]{2-x}, & x < 2 \end{cases}$$

815. Να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει: $g(x)=e^{-x}-1$

$$g^{-1}(x) = -\ln(x+1)$$

816. Να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει: $h(x) = \frac{x}{x+3}$

$$h^{-1}(x) = \frac{3x}{1-x}$$

817. Να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει: $f(x)=x^2-2x+5, x>1$



$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} + 1$$

818. Να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει: $g(x) = \ln \frac{2x-2}{x+1}$

$$g^{-1}(x) = \frac{e^x + 2}{2 - e^x}$$

819. Να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει: $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \leq 2 \\ 3 - 5x, & x > 2 \end{cases}$

820. Δίνεται συνάρτηση $f^5(x) + 2f^3(x) - f(x) + x = 0$,

- ν.δ.ο. είναι αντιστρέψιμη και
- να βρεις την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = -x^5 - 2x^3 + x$$

821. Δίνεται συνάρτηση $f(f(x)) - f(x) = x + 2$,

- ν.δ.ο. είναι αντιστρέψιμη και
- να βρεις την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = f(x) - x - 2$$

Ιδιότητες αντίστροφης συνάρτησης $A_{f^{-1}}$:

- Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική με την f ως προς την $y=x$
- Αν $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
- Αν $f \uparrow$ τότε για τα κοινά τους σημεία
 $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$
- $A_{f^{-1}} = f(A)$ και $f^{-1}(A) = A_f$



822. Δίνεται συνάρτηση γνησίως μονότονη όπου διέρχεται από το $A(2,3), B(3,6)$.

- Ν.δ.ο. αντιστρέφεται και
- να λύσεις: $f(f^{-1}(x^2 + 2) - 1) = 3, f^{-1}(f(2e^x) + 3) < 3$

$$x = \pm 2, x < 0$$

823. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 1$,

- ν.δ.ο. είναι αντιστρέψιμη και να
- λύσεις: $f(f^{-1}(4\sin x + 2)) = 4$
- $f^{-1}(f(x^2 + 2x + 2) - 5) > 0$



$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \mathbb{R} - \{-1\}$$

824. Δίνεται $f(x) = 4x^5 + x - 128$

- $\exists f^{-1}$;
- $f^{-1}(-128) =$;
- $f^{-1}(2) =$;

0,2

825. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x - 9 \Rightarrow$

- $\exists f^{-1} =$;
- $f^{-1}(-5) =$;
- να λύσεις $f(x) = f^{-1}(x)$
- $f^{-1}(f(\ln x) - 3) > 0$

1,2, $x > e$

826. Δίνεται συνάρτηση $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, να βρεις

- f^{-1}
- $f(-1)$
- $f(e^2)$

0,2

827. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2013} + e^x + x - 1$,

- ν.δ.ο. αντιστρέφεται και
- να βρεις τα κοινά των $C_f, C_{f^{-1}}$

$\uparrow, x = 0$

828. Δίνεται συνάρτηση $f^3(x) + 3f(x) = x + 3$,

- ν.δ.ο. αντιστρέφεται,
- να βρεις αντίστροφη,
- μονοτονία και
- κοινά τους σημεία

$$f^{-1}(x) = x^3 + 3x - 3, \uparrow, (1,1)$$

829. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 1, f(x)f(y) = f(x-y)$.



- Ν.δ.ο. $f(0) = 0$
- Ν.δ.ο. $f(x) = 0, \forall x$

830. Έστω $f: R \rightarrow R$ όπου διέρχεται από τα σημεία $A(2,0), B(3,1)$.

- Να βρεις τη μονοτονία της αν γνωρίζεις ότι είναι γνησίως μονότονη
- να υπολογίσεις $f^{-1}(0), f^{-1}(1)$

2,3

831. Έστω $f: R \rightarrow R, 1-1$ όπου διέρχεται από το $A(3,2), B(3,4)$. Να λύσεις την εξίσωση

$$f(2 + f^{-1}(1-x)) = 4$$

-1

832. Αν $f(x) + f(x-1) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f$ δεν είναι 1-1

833. Έστω $f: R \rightarrow R, 1-1$, όπου διέρχεται από $A(3,2), B(4,-1)$.

- Ποια η μονοτονία της και
- να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(x)-1) < 2$

$\downarrow, x < -1$

834. Αν $f(x) = x \eta \mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να υπολογίσεις το $f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\frac{\pi}{6}$

835. Έστω $f: R \rightarrow R$, όπου $f^3(x) + f(x) = x + 1$, να υπολογίσεις την $f^{-1}(x)$

$$x^3 + x - 1$$

836. Αν $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, να υπολογίσεις την $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + 1, & x \geq -1 \\ 1 - \sqrt[3]{-1-x}, & x < -1 \end{cases}$$

837. Έστω $f: R \rightarrow R, 1-1$, διέρχεται από $A(4,3), B(5,1)$

- ποια η μονοτονία της f και
- να λυθεί $f(2 + f(x^2)) < 1$

$\downarrow, (-2, 2)$

838. Αν $f(x) = e^x + \ln(x+1) \Rightarrow f^{-1}(1) =$

0



839. Για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι $f(f(x)) = 2021x + 2022$

- Ν.δ.ο. η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και
- να βρεις την αντίστροφη .
- Να λύσεις την εξίσωση $f(x) = x$

$$f^{-1}(x) = \frac{f(x) - 2022}{2021}, x = -\frac{2022}{2020}$$

840. Δίνεται η συνάρτηση $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$

- Ν.δ.ο. είναι 1-1 και
- να λύσεις την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$

1

841. Έστω συνάρτηση f αύξουσα και θετική .Ν.δ.ο. η $g(x) = \frac{f^2(x) - 1}{f(x)}$ αντιστρέφεται

842. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.Να εξετάσεις αν αντιστρέφεται και να βρεις την αντίστροφη

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + 1, & x \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$$

843. Δίνεται η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$

- Ν.δ.ο. η συνάρτηση f αντιστρέφεται .
- Να βρεις την αντίστροφη και
- να εξετάσεις αν έχουν κοινά σημεία

$$\frac{x^2 + 1}{x}, \emptyset$$

844. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ 3x - 2, & x < 2 \end{cases}$

- Ν.δ.ο. είναι 1-1 και
- να βρεις την αντίστροφή της f .

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \\ \frac{x+2}{3} \end{cases}$$

845. Αν συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία $A(2,3), B(3,4)$, να λύσεις την

$$\text{ανίσωση : } f(1 + f^{-1}(x-1)) > 4$$



$$x > 4$$

846. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x}{3-4x}$, χωρίς να βρεις την αντίστροφη να υπολογίσεις $f^{-1}(-3)$.

1

847. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x + 1}$, $x \neq -1$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.
- Αν $\alpha = 3$ τότε:
- Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .
- Αν συνάρτηση αντιστρέφεται και $f(x^3 + 1) = 2x - 8$ να βρεις το $f^{-1}(2)$.

126

848. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 4$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 - 1".
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να ορίσετε την f^{-1} .
- Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .

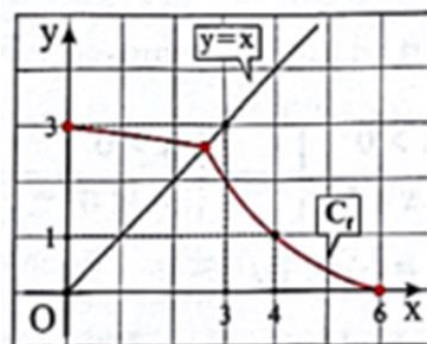
849. Να ορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f , όταν:

- $f(x) = x - 5$
- $f(x) = 3x - 2$
- $f(x) = \frac{5}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x-5} - 2$
- $f(x) = x^3 - 1$
- $f(x) = x^2 - 6x + 10, \quad x \geq 3$

850. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- Να εξετάσετε αν η f είναι "1 - 1".
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .
- Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = f^{-1}(3)(f \circ f)(6) + (f \circ f^{-1})(2)$
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 4$.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .



851. Χωρίς να βρείτε την αντίστροφη της f , στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη C_f και τη $C_{f^{-1}}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$
- $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$
- $f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, \pi]$
- $f(x) = \epsilon\phi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = x^3$

852. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x|$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 - 1".
- Να ορίσετε την f^{-1} .
- Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις $C_f, C_{f^{-1}}$.

853. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - 2x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.



- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- Να ορίσετε την f^{-1} .

854. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 2$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να ορίσετε την f^{-1} .
- Να σχεδιάσετε τις $C_f, C_{f^{-1}}$.

855. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - 1$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να ορίσετε την f^{-1} .
- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + 2$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να ορίσετε την f^{-1} .
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

857. Να ορίσετε την αντίστροφη των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = e^{x-1} - 2$
- $f(x) = 3e^{x-1} - 1$
- $f(x) = \ln x - 3$
- $f(x) = 2\ln(x-1) + 1$



- $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1} *$

- $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

858. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να ορίσετε την f^{-1} .
- Να σχεδιάσετε τη C_f και τη $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

859. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε τις αντίστροφές τους.

- $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

860. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + x + 1$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.
- Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq x$.

861. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + 3x - 3$

- Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να υπολογίσετε το $f^{-1}(-3)$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $C_{f^{-1}}$.



- Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x) > x$

862. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

- Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} .
- Να βρείτε την αντίστροφη της f .
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Αν το εμβαδόν ανάμεσα στη C_f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ είναι ίσο με $\frac{1}{4}$ τ.μ., να υπολογίσετε το εμβαδόν ανάμεσα στις C_f και $C_{f^{-1}}$.

863. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu x + x + \epsilon\phi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$.
- Να λύσετε την εξίσωση $1 - xe^x = e^x$.

864. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις: $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^9 + 4x + 4$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- Να υπολογίσετε το $f^{-1}(9)$.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x^2 - 3x + 11) = 1$
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

865. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln x - 1$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .



- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$
- Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x \geq 1$.

866. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^{-x} - x$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.

867. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + e^x$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} .
- Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $f^{-1}(x) = x$ ii) $f^{-1}(x) = x - 1$
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $f^{-1}(x) \leq x$ ii) $f^{-1}(x) \geq x - 1$
- Να λύσετε την εξίσωση $x - e = 1 - e^x$.
- Να βρείτε αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινά σημεία.
- Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^x) + f(5^x) = f(3^x) + f(7^x)$

868. Έστω: $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε την εξίσωση: $e^{\eta \mu x} + \eta \mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2}$ με $x \in [0, \pi]$
- Να αποδείξετε ότι $e^e - e^\pi > e - \pi$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται κάτω από την ευθεία: $y = x$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 0$.

869. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) + 3f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.



- Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να εκφράσετε την f^{-1} ως συνάρτηση της f .

870. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

871. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $(f \circ f + g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$,
- ισχύει: $f^{-1}(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

872. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(f(x)) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

- η f είναι αντιστρέψιμη,
- $f(0) = 0$,
- $f^{-1}(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.

873. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και ισχύει:

$$f^2(x) + 1 = 2f(x) + e^{2x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".
- Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .
- Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

874. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(f(x)) = 2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- η f είναι "1-1",
- η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,
- $f(1) = 1$,
- $f^{-1}(x) = 2 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$,



- η C_f τέμνει την $y = x$ μόνο μία φορά.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(e^{x-1} + x - 1) = 1$
- Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

875. Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.

- Να λύσετε την εξίσωση: $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$

876. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(-1,2)$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(e^x + 1) + 2) = 0$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f(\ln(x + 1)) + 2) < -1$

877. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = 2e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να υπολογίσετε το $f(0)$.
- Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

878. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = 3 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f ,
- να λύσετε την ανίσωση: $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2 - x)$

879. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + 8x - 8$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$



- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-8)$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > 1$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$.
- Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

880. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $e^x \geq 1 - x$ ii) $1 \leq e^{-x} - xe^{-x}$
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε τον αριθμό $f^{-1}(e)$.
- Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$

881. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$, $f(D_f) = \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $f^{-1}(x) \leq x$ ii) $f^{-1}(x) \geq x$
- Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(3^x) + f(4^x) = f(5^x) + f(6^x)$
- Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις: $f^{-1}(x) = f(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

882. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.



- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y = x$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$.
- Να βρείτε για ποια x η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.
- Να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{e}{\pi} < \pi - e$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x) \geq f\left(\frac{e}{x}\right), \quad x > 1$
- Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις: $f(f(f(x))) = x$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.
- Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + \ln x = y \\ y + \ln y = z \\ z + \ln z = x \end{cases}$$

