



Συναρτήσεις



Κώστας Γλυκός

Για αρχή 672 ασκήσεις
και τεχνικές σε 84 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Καλό πήξιμο



Θεωρία για τις
συναρτήσεις

1. Τι λέμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

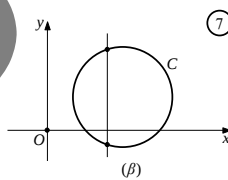
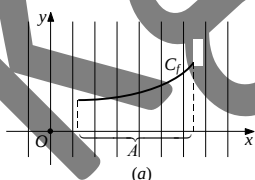
Απάντηση

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μία διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

Γεωμετρική ερμηνεία :

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β).



2. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:
 $f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$. Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $f(A)$.



3. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι « Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B »;

Απάντηση

Εννοούμε ότι το σύνολο B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και το σύνολο τιμών της $f(B)$ είναι $f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$.

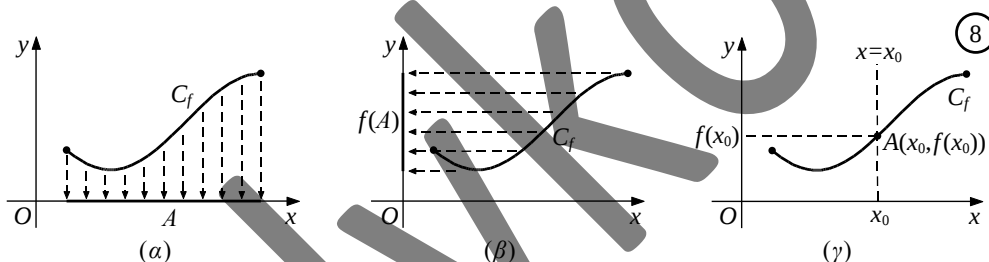
4. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, με $x \in A$.

Προσοχή : Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
- Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).



Συμμετρίες :

- Ως προς $x x'$: αλλάζω πρόσημο του y . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f
- Ως προς $y y'$: αλλάζω το πρόσημο του x (άρτια)
- Ως προς αρχή των αξόνων : αλλάζω το πρόσημο των x, y (περιττή)
- Ως προς $y=x$: αλλάζω τη θέση των x, y

Ενδιαφέρον : Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν .



Θέματα συναρτήσεων

1. Δίνονται τα σημεία $A(1,2), B(-3,4), \Gamma(2,-2), \Delta(-1,-1)$, να υπολογίσεις τις αποστάσεις $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$

$$2\sqrt{5}, \sqrt{61}, \sqrt{10}$$

2. Δίνονται τα σημεία $A(1,2), B(-3,4), \Gamma(0,-2)$, να βρεις τις αποστάσεις τους από τους άξονες $x\chi', y\gamma'$

3. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει:

- $|x|=2$
- $|x|<2$
- $|y|>2$
- $|x|=|y|$.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'\chi'$ και $y'\gamma'$:

5. $A(-1,2), B(3,4), \Gamma(-5,-6), \Delta(\alpha-1, \beta+2), M(x,y)$.

6. Να βρεις το σημείο του $x\chi'$ που ισαπέχει από $A(1,2), B(5,2)$

$$M(3,0)$$

7. Να βρεις το σημείο $A(x-1, x+2)$ που απέχει από το $B(3,5)$ απόσταση $\sqrt{5}$

$$x=2$$

8. Δίνεται σημείο $A(\alpha^2-4\alpha+3, \alpha^2-\alpha-6)$. Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε:

- το A να είναι σημείο του άξονα $x'\chi'$.
- το A να είναι σημείο του άξονα $y'\gamma'$.

9. Δίνονται τα σημεία $A(5,-1), B(1,1), C(2,3)$. Να βρεις το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$

ορθογώνιο

10. Έστω το σημείο $A(-2,3)$. Να βρείτε το σημείο B όταν:

- τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το $K(0,1)$.
- τα A, B είναι αντιδιαμετρικά του κύκλου με κέντρο το $K(-1,0)$.

11. Δίνονται τα σημεία $A(3,2), B(7,-4)$ και M του $x\chi'$.

- Να βρεις το M αν το $\triangle MAB$ είναι ισοσκελές στο M.
- Να βρεις το M αν το $\triangle MAB$ είναι ορθογώνιο στο M.

$$\left(\frac{13}{2}, 0\right), (5 \pm \sqrt{12}, 0)$$

12. Αν $A(1,5), B(5,-2), C(-3,-3)$, να βρεις το είδος του τριγώνου

Αν $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ τότε το

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

μέσο M :

Απόσταση AB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



οξυγώνιο, ισοσκελές

13. Να βρείτε τα a, b ώστε τα σημεία $A(-a+1, 2), B(-b+2, b)$ να είναι συμμετρικά ως προς:
- το $O(0, 0)$
 - τον άξονα $x'x$
 - την ευθεία $y = x$
14. Να βρεις την κορυφή Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο με $A(-2, 3), B(3, 8), C(-2, -4)$
- $(-7, -9)$
15. Να βρεις το Γ συμμετρικό του A ως προς B , όπου $A(1, 2), B(3, 5)$
- $(5, 8)$
16. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(-9, -2)$. Να βρεις
- Το σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα A και B
 - Το σημείο του άξονα $y'y'$ που ισαπέχει από τα A και B .
17. Να βρεις την κορυφή Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο με $A(3, -2), B(5, 6), C(-1, 3)$
- $(-3, -5)$
18. Η απόσταση του $A(-1, 3)$ από το B είναι 5. Το B έχει τεταγμένη διπλάσια από την τετμημένη του. Να βρεις το σημείο B
- $(3, 6), (-1, -2)$
19. Δίνονται οι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(-1, -3), B(0, 2), C(8, 3)$, να βρεις τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma, B\Gamma$.
- $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (4, \frac{5}{2}), (\frac{7}{2}, 0)$
20. Να βρεις την τέταρτη κορυφή του $AB\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου αν $A(-2, 3), B(3, 8), C(-2, -4)$.
- $(-7, -9)$
21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(5, -1), B(9, 2), C(6, 6)$, να βρεις
- Είδος τριγώνου
 - περίμετρο
 - εμβαδόν του

$$\text{ορθ}, 10 + 5\sqrt{2}, \frac{25}{2}$$



22. Αν $A(1,3), B(2,7), \Gamma(6,8), \Delta(5,4)$, ν.δ.ο. το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

23. Αν $A(3,1), B(2,5), \Gamma(6,4), \Delta(7,2)$, ν.δ.ο. το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο

24. Αν $A(3,1), B(2,5), \Gamma(3,9), \Delta(4,5)$, ν.δ.ο. το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος

25. Αν $A(-2,1), B(-1,3), C(1,2), O(0,0)$, ν.δ.ο. ΑΒΓΟ είναι τετράγωνο.

26. Να εξετάσεις αν $A(-1,3), B(2,0), C(-3,5)$ είναι συνευθειακά.

27. Να βρεις το συμμετρικό του $A(2,-5)$ ως προς :

- xx'
- yy'
- $O(0,0)$
- $y=x$
- $B(3,2)$

28. Να βρεις την απόσταση του $A(2,-5)$ από :

- xx'
- yy'
- $O(0,0)$
- $y=x$
- $B(3,2)$

29. Δίνονται τα σημεία $A(3x+1, 2), B(1, 4-5x)$

- Αν $(AB) = 10 \Rightarrow x = ?$
- Επιπλέον να βρεις ποιο το Γ του yy' ώστε το ΑΒΓ να είναι ισοσκελές στο Γ .

30. Να βρεις το Γ του κατακόρυφου άξονα ώστε το ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Γ με $A(-2,2), B(1,1)$

$(0,3)$

31. Να εξετάσεις αν δημιουργούν τρίγωνο τα σημεία : $A(-1,-5), B(2,1), C(1,5)$

32. Σε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο να βρεις την τέταρτη κορυφή αν $A(1,4), B(-1,9), D(5,-3)$

$(3,2)$

33. Να εξετάσεις αν τα σημεία $A(-1,2), B(8,5), C(2,3)$ δημιουργούν τρίγωνο.

34. Αν σημεία $A(-2,1), C(0,5)$ είναι κορυφές τετραγώνου ΑΒΓΔ, να βρεις το εμβαδό του.

10





35. Οι τεταγμένες των σημείων A,B είναι ρίζες της εξίσωσης $y^2 - (k^2 + 3k + 10)y - 4 = 0$, να βρεις το κ ώστε το $M(x, 5)$ να είναι μέσο των A,B .

0, -3

36. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2), B(2, 5), M \in \gamma\gamma'$, να βρεις το M ώστε το AMB ορθογώνιο στο M

(0, 4), (0, 3)

37. Να βρεις το συμμετρικό του $A(4, 5)$ ως προς το σημείο $B(6, 9)$.

(8, 13)

38. Τα μέσα πλευρών τριγώνου ABΓ είναι τα σημεία $D(1, -2), E(2, 3), Z(-1, 4)$. Να βρεις τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου

(-2, -1), (4, -3), (0, 9)

39. Δίνονται τα σημεία $A(-1, -5), B(2, 1), C(1, 5)$, ν.δ.ο.

- σχηματίζεται τρίγωνο ABΓ .
- Να βρεις την κορυφή Δ ώστε το ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο .

(-2, -1)



Γεωμετρικοί τόποι

Πεδία Ορισμού

- $\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$
- $\sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$
- $\ln f(x) \Rightarrow f(x) > 0$

40. Να βρεις τι παριστάνουν τα σημεία $M(\lambda - 1, \lambda + 1)$

41. Να βρεις το γεωμετρικό τόπο των σημείων :

- $M(3k + 1, 2k)$
- $M(2a + b, 3a + 5b), a + b = 1$
- $M(2\eta\mu\alpha - 1, \eta\mu\alpha + 3)$

$$3y = 2x - 2, y = -2x + 7, 2y = x + 7$$

42. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $M(\lambda - 2, \lambda + 2)$
- $M(2, \lambda)$
- $M(\lambda^2 + 1, 3)$
- $M(3, \eta\mu t)$

43. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.

44. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2(3t, 3t - 1)$ για κάθε χρονική στιγμή t με $t > 0$.

- Να βρεις τις γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
- Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t , στις οποίες τα δύο πλοία συναντώνται.
- Να βρεις την απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

45. Να βρεις τι παριστάνουν οι γραμμές

- $(x + y - 2)^2 - 4 = 0$
- $|x| - |y| = 0$
- $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 6 = 0$

$$y = -x + 4, y = -x \text{ \& } y = \pm x \text{ \& } x = 2y + 4, x = 2y + 6$$

Συνδυαστικά συναρτήσεων :

46. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$ υπολόγισε :

- $f(0), f(1), f(-1)$
- $f(-x), f(2x), f(x+1)$
- $f(f(x))$



47. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$, να λύσεις τις εξισώσεις :

- $f(x) = -2$
- $f(x) = f(3)$
- $f(x) = f(x+1)$
- $f(f(x)) = f(0)$

48. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1, x \in \{-1, 0, 1\}$ βρεις σύνολο τιμών

49. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 - 2ax - 6}{x^2 - 2x + 1}, a \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο με τετμημένη 3, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- Την τιμή του a
- Να αποδείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{8}{(x-1)^2}$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$, η οποία διέρχεται από τα σημεία : $A(-2, 5), B(-4, 3)$

- Να βρεις πεδίο ορισμού
- Να βρεις τα a, b
- Να βρεις που τέμνει άξονες
- Να δείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$

51. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 7 - 2x - \sqrt{x-2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7 - 2x$

52. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a-x} - 3x$, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε σημείο με τεταγμένη 2, να βρεις :

- Την τιμή του a
- Πεδίο ορισμού

53. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7$

54. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2ax+1, & x \geq 2 \\ bx+3, & x < 2 \end{cases}$ όπου $f(1) = f(2) = 5$, να βρεις :

- a, b



- $f(3), f(-3)$
- $f(x^2 + 2)$

55. Να βρεις πεδίο ορισμού συναρτήσεων :

- $f(x) = \sqrt{x-4}$
- $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x}$
- $h(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$

56. Να βρεις πεδίο ορισμού συναρτήσεων :

- $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$
- $g(x) = \frac{2018}{x^2-3x+2}$
- $h(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+10}$

57. Να βρεις πεδίο ορισμού συναρτήσεων :

- $f(x) = \sqrt{2x-8} + \sqrt{6-3x}$
- $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$
- $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-2}}$

58. Να βρεις πεδίο ορισμού συναρτήσεων :

- $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$
- $g(x) = \frac{x-1}{x^2-9} + \frac{1}{x}$

59. Δίνεται $f(x) = x^2 - ax + b, f(1) = 5, f(0) = 3 \Rightarrow a, b =$;

60. Δίνεται $f(x) = x^2 + ax + b, A(1, 3), B(0, 2) \Rightarrow a, b =$;

61. Δίνεται $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, A(1, 2), B(2, 4), O(0, 0) \Rightarrow a, b, c =$;

62. Δίνεται $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2-4x}}, A(5, 0)$

- Να βρεις πεδίο ορισμού
- Να βρεις το a
- Να βρεις το $f(2), f(10), f(-3), f(1)$
- Να βρεις το x ώστε : $f(x) = 0$
- Να βρεις το x ώστε : $f(x) = 2$

63. Δίνεται $f(x) = x^2 + 3x$

- Να βρεις πεδίο ορισμού



- Να βρεις το a ώστε $f(a) - f(2) = 3$
- Να βρεις το $f(0), f(1), f(-3), f(1)$
- Να βρεις το : $f(-x), f(2x), f(x+1)$

64. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \geq 0 \\ -x^2+3, & x < 0 \end{cases}$, να βρεις $f(0), f(2), f(-1)$ και να βρεις το x ώστε $f(x) = -1$

65. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$ υπολόγισε :

- $f(0), f(1), f(-1)$
- $f(-x), f(2x), f(x+1)$
- $f(f(x))$

66. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$, να λύσεις τις εξισώσεις :

- $f(x) = -2$
- $f(x) = f(3)$
- $f(x) = f(x+1)$
- $f(f(x)) = f(0)$

67. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1, x \in \{-1, 0, 1\}$ βρεις σύνολο τιμών

68. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 - 2ax - 6}{x^2 - 2x + 1}, a \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο με

τετμημένη 3, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- Την τιμή του a
- Να αποδείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{8}{(x-1)^2}$

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$, η οποία διέρχεται από τα σημεία : $A(-2, 5), B(-4, 3)$

- Να βρεις πεδίο ορισμού
- Να βρεις τα a, b
- Να βρεις που τέμνει άξονες
- Να δείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$

70. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 7 - 2x - \sqrt{x-2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7 - 2x$



71. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a-x} - 3x$, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε σημείο με τεταγμένη 2, να βρεις :
- Την τιμή του a
 - Πεδίο ορισμού
72. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, να βρεις :
- Πεδίο ορισμού
 - $f(1), f(3)$
 - Να λύσεις $f(x) = 7$
73. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2ax+1, & x \geq 2 \\ bx+3, & x < 2 \end{cases}$ όπου $f(1) = f(2) = 5$, να βρεις :
- a, b
 - $f(3), f(-3)$
 - $f(x^2+2)$
74. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$ υπολόγισε :
- $f(0), f(1), f(-1)$
 - $f(-x), f(2x), f(x+1)$
 - $f(f(x))$
75. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$, να λύσεις τις εξισώσεις :
- $f(x) = -2$
 - $f(x) = f(3)$
 - $f(x) = f(x+1)$
 - $f(f(x)) = f(0)$
76. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1, x \in \{-1, 0, 1\}$ βρεις σύνολο τιμών
77. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 - 2ax - 6}{x^2 - 2x + 1}, a \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο με τεταγμένη 3, να βρεις :
- Πεδίο ορισμού
 - Την τιμή του a
 - Να αποδείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{8}{(x-1)^2}$
78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$, η οποία διέρχεται από τα σημεία : $A(-2, 5), B(-4, 3)$
- Να βρεις πεδίο ορισμού



- Να βρεις τα α, β
- Να βρεις που τέμνει άξονες
- Να δείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$

79. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 7 - 2x - \sqrt{x-2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7 - 2x$

80. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a-x} - 3x$, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε σημείο με τεταγμένη 2, να βρεις :

- Την τιμή του a
- Πεδίο ορισμού

81. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7$

82. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2ax+1, & x \geq 2 \\ bx+3, & x < 2 \end{cases}$ όπου $f(1) = f(2) = 5$, να βρεις :

- α, β
- $f(3), f(-3)$
- $f(x^2+2)$

83. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x^2 + 3x, g(x) = 9 - x^2$, να βρεις τύπο και πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

- $h(x) = f(x) + g(x)$
- $m(x) = f(x)g(x)$
- $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

84. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x} - 3, g(x) = 3 + \sqrt{x}$, να βρεις τύπο και πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

- $h(x) = f(x) + g(x)$
- $m(x) = f(x)g(x)$
- $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$



85. Να βρεις τα σημεία τομής με τους άξονες των συναρτήσεων :

$$f(x) = -2x + 1, g(x) = x^2 - 4x + 4, h(x) = \frac{x-1}{2-x}$$

86. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + a}{x-3}, g(x) = \frac{3x-3a}{3-x}, f(-2) = g(-2) \Rightarrow a = ;$

87. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2a + x^3, g(x) = a + x^2, f(3) + g(3) = 24 \Rightarrow a = ;$

88. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + ax + a - 6, g(x) = 2x - 3, A(2, -8) \in C_f$

- να βρεις το a
- που τέμνει η C_f τους άξονες
- που τέμνονται C_f, C_g

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + x - 1, g(x) = 2x + 1, f(1) = g(1)$

- να βρεις το a
- που τέμνονται C_f, C_g

90. Δίνεται $f(x) = x^2 - ax + 4, A(1, 7) \in C_f$, να βρεις τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα

91. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = ax^2 + bx - 3, g(x) = 2\sqrt{2x^2 + 2}, A(-2, -5) \in C_f, f(1) = g(1) \Rightarrow a, b = ;$

92. Δίνεται $f(x) = \frac{ax-5}{\sqrt{x}-1}, A(4, 7) \in C_f$

- να βρεις πεδίο ορισμού
- το a
- τότε η συνάρτηση βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα

93. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x < 2 \\ 4 - 2x, & x \geq 2 \end{cases}$

- να βρεις : $f(1), f(2), f(3)$
- που τέμνει η συνάρτηση τους άξονες

94. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ a^2 - 8, & x = -1 \end{cases}, f(-2) = f(-1), a > 0 \Rightarrow a = ;$

95. Με σύρμα μήκους x φτιάχνεις τετράγωνο, να φτιάξεις τη συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδό του τετραγώνου

96. Με σύρμα μήκους x φτιάχνεις ισόπλευρο τρίγωνο, να φτιάξεις τη συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδό του τριγώνου

97. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 5$



- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(-1) + f(0) + f(-2)$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
- Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha) \leq 5$.
- Να εξετάσετε αν το $y = 1$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

98. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + x + 3$

- Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;
- Να υπολογίσετε τις τιμές των $0, 1, -1$ και 2 .
- Ποια x έχουν τιμή το 5 ;
- Να αποδείξετε ότι: $f(1-x) - f(2-x) - 2x + 4 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

99. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

- Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.
- Να αποδείξετε ότι το $y = 4$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

100. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{αν } x \leq -1 \\ |x| - 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(-2) + f(3)$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 7$.

101. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^3 - 5, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(5) + f(0) - f(-1)$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

102. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Να υπολογίσετε τις τιμές: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$.



103. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = x^5 + 3x^2 - x + 2$
- $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+5}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
- $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$

104. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}$
- $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$
- $h(x) = \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{x-2}{x^2-1}$

105. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \sqrt{x-2}$
- $g(x) = \sqrt{5-x}$
- $h(x) = \sqrt{x^2-4}$
- $\varphi(x) = \sqrt{16-x^2}$
- $\omega(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$
- $\kappa(x) = \sqrt{12-x-x^2}$

106. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-3}}$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{9-x^2}}$
- $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
- $f(x) = \frac{x^2-3}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

107. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x}{|x-3|-2} + \frac{3}{|7-2x|-1}$
- $g(x) = \sqrt{|x-3|-5} + \sqrt{7-|x-4|}$

108. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x}{x^3-5x^2+8x-4}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{16-x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x^3+x^2-x-1} + \sqrt{9-x^2}$



- $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{3-|x-2|}} + \sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$

- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-4}$

109. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x+5}{\eta\mu x}$

- $f(x) = \frac{x^2+1}{\sigma\upsilon\nu x}$

- $f(x) = \frac{\eta\mu x+2}{2\eta\mu x-1}$

- $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}}$

- $f(x) = \frac{x^2+\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x+\sqrt{3}}$

- $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}}$

110. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+\lambda x+1}}$

- $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{\lambda x^2+2x+\lambda}}, \quad \lambda \neq 0$

111. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

- $f(x) = \sqrt{e^x+3}$

- $f(x) = \ln(e^x+1)$

- $f(x) = \ln(x^2+x+1)$

112. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{1}{e^x+2}$

- $f(x) = \frac{2x}{e^x-1}$

- $f(x) = \frac{x^2+1}{e^{2x}-3e^x+2}$

- $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{x-2}$

- $f(x) = \frac{3x+1}{\ln x-2}$

- $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-3}}{x-4}$

113. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

- $f(x) = \sqrt{1-e^x}$



- $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-e}}$

- $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x-2}$

114. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \ln x^2$

- $f(x) = \ln(x-1)^2$

- $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$

- $f(x) = \ln(x^2 + 6x + 9)$

- $f(x) = \ln x^3$

- $f(x) = \ln(x-2)^5$

115. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

- $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-3}$

- $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

- $f(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{x-2}$

- $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

- $f(x) = \ln(\ln x)$

- $f(x) = \ln(\ln(x-1))$

- $f(x) = \frac{\ln(e^x-2)}{x-5}$

- $f(x) = \sqrt{\ln x}$

- $f(x) = \ln \frac{2x}{x-1}$

- $f(x) = \ln(\sqrt{x-1} - 1)$

- $f(x) = \ln(\sqrt{2-x} - 1)$

116. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \ln x^2$

- $f(x) = \ln|x|$

- $f(x) = \ln(e^x - 1)$

- $f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$

- $f(x) = \ln \frac{1+e^x}{e^{-x}-e^x}$

- $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

- $f(x) = \ln(\ln x)$



- $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

117. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{\sqrt{5+4x-x^2}}{\ln x}$

- $g(x) = \frac{x^2+x+1}{9x-4 \cdot 3^{x+1}+27}$

- $\kappa(x) = \ln \frac{x+5}{5-x} + 3 \ln \frac{x-1}{x-3}$

- $\varphi(x) = \sqrt{3 - |x-2|} + \ln \frac{2-x}{3+x}$

118. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

- Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από τα σημεία: $A(3, -4)$, $B(0, -2)$, $\Gamma(8, -16)$, $\Delta(-1, 2)$

119. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{2}{x-4} + 1, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$

- Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .

- Να εξετάσετε ποια από τα σημεία: $A(5, 3)$, $B(-1, 3)$, $\Gamma(6, 2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

120. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο A , όταν:

- $f(x) = x^2 + \lambda^2 x + 6$ και $A(2, 28)$

- $f(x) = x^3 + \lambda^2 x + \lambda x + 4$ και $A(-1, -3)$

121. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, όταν:

- $f(x) = (2-x)(x^2-1)$

- $f(x) = (x+3)(x^2+4)$

- $f(x) = (25-x^2)(x^2+x)$

- $f(x) = (|x|-1)(x+2)$

122. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^3 - 3x^2$

- $f(x) = 2x^2 + x - 3$

- $f(x) = |x-2| - 4$



- $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$

- $f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$

- $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$

123. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = x + 5$

- $f(x) = x^2 + 7x, \quad g(x) = 2x - 4$

- $f(x) = |x - 3| + 3, \quad g(x) = 7 - |3 - x|$

- $f(x) = x^3, \quad g(x) = x$

- $f(x) = -x^2, \quad g(x) = x^3$

- $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x$

124. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f και των αξόνων $x'x$ και $y'y$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^3 + x^2 - 2$

- $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$

- $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$

- $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

125. Να βρείτε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των C_f και C_g στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x - 1$

- $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + x - 1$

- $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$ και $g(x) = 3x^2 + x - 1$

126. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g , όταν:

- $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = x^2$

- $f(x) = x - 1$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$

127. Έστω οι συναρτήσεις f και g . Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , C_g και για ποια x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

- $f(x) = 3x^2 + 1, \quad g(x) = 2x^2 + 5x - 5$

- $f(x) - g(x) = x^4 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = g(x) + x^4 - 10x^2 + 9, \quad x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = g(x) + \frac{x^2-1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$



• $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{2}{x}$

128. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = (\alpha + 2)x^2 + (2 - \beta)x - 1$ τέμνονται πάνω στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, να βρείτε:

- τις τιμές των α και β ,
- τα άλλα κοινά σημεία των C_f και C_g , γ) για ποια x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

129. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + 6x + 11$ και $g(x) = -\frac{6}{x}$. Να βρείτε:

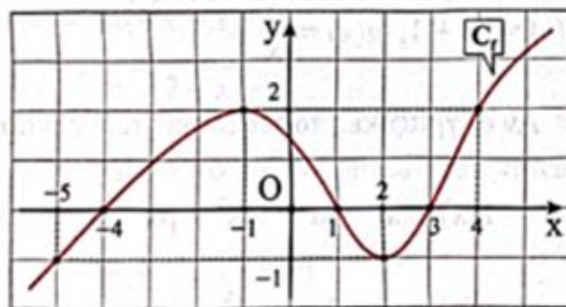
- τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεών τους C_f και C_g ,
- τη σχετική θέση των C_f και C_g .

130. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = \lambda x + 2 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- η γραφική παράσταση της g διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,
- οι C_f , C_g έχουν κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,
- για $\lambda = 1$ η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g , όταν $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$.

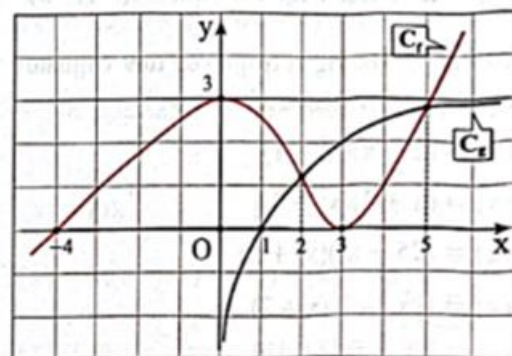
131. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(-1) + f(2) + f(4)$
- Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $f(x) = 0$ ii) $f(x) = 2$
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων: i) $f(x) = 1$ ii) $f(x) = 5$ iii) $f(x) = -1$
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $f(x) < 0$ ii) $f(x) > 0$



132. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού B και το σύνολο τιμών $g(B)$ της g .
- Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $f(x) = 0$ ii) $g(x) = 0$ iii) $f(x) = g(x)$
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $f(x) > 0$ ii) $g(x) < 0$ iii) $f(x) < g(x)$ iv) $f(x) > g(x)$





133. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = e^{x-2} - 1$
- $f(x) = \ln(x - 2)$
- $f(x) = e^x - 2$
- $f(x) = \ln(x - 1) - 1$
- $f(x) = e^x - e^{-x}$
- $f(x) = \ln(e^x - 1) - 1$

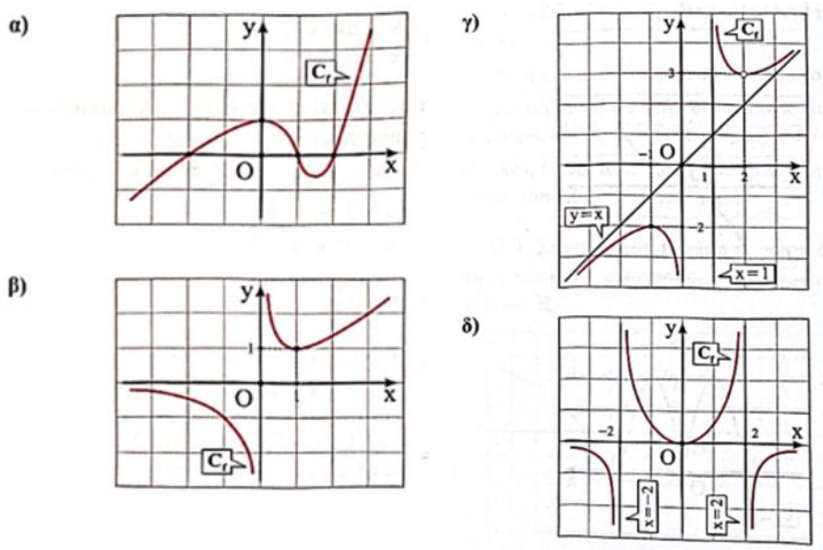
134. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες. Στη συνέχεια να βρείτε για ποια x η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

- $f(x) = e^{2x} - e^x$
- $f(x) = \ln x - 1$

135. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+2} - 8$. Να βρείτε:

- τα κοινά σημεία των C_f και C_g ,
- τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g ,
- τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$,
- για ποια x η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

136. Στα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .



137. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = \sqrt{x-2}$
- $f(x) = \sqrt{1-x} + 2$



- $f(x) = (x - 1)^2 - 2$
- $f(x) = x^2 + 2x + 3$
- $f(x) = 2\eta\mu x + 1$
- $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

138. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$
- $f(x) = \frac{x-2}{x+3}, \quad x \in [-2, 2]$

139. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = e^{x-2} + 3$
- $f(x) = \ln(x - 2)$
- $f(x) = e^{1-x} - 2$
- $f(x) = \ln(x - 1) + 1$

kglykos.gr



Μη γραμμικά συστήματα

Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα :

$$140. \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ -5x^2 + 2y^2 = -2 \end{cases}$$

$$(x, y) = (\pm 2, \pm 3)$$

$$141. \begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

$$142. \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$(x, y) = (2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2)$$

$$143. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

$$144. \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(x, y) = (2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$$

$$145. \begin{cases} x + 2\sqrt{3} \cdot y = 1 \\ \sqrt{3} \cdot x + 6y = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$146. \begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$(x, y) = (-1, 3), (1, -3), (-3, 1), (3, -1)$$

$$147. \begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$148. \begin{cases} xy = -3 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

$$149. \begin{cases} |x+1| = |x+y| \\ 3x+5y=9 \end{cases}$$

$$150. \begin{cases} xy = 8 \\ x + y = -6 \end{cases}$$



$$151. \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 0 \\ \sqrt{(x-y)^2} = 2 \end{cases}$$

$$152. \begin{cases} xy = -2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$(x, y) = (2, -1), (1, -2)$$

$$153. \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

$$(x, y) = (3, 2), (-1, -6)$$

$$154. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 11 \end{cases}$$

$$(x, y) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$$

$$155. \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

$$156. \begin{cases} \frac{-3}{x-7} + \frac{5}{y+3} = 7 \\ \frac{5}{x-7} - \frac{4}{y+3} = -3 \end{cases}$$

$$157. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{3}{x-y} = \frac{5}{3} \\ \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$158. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ -\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = -1 \end{cases}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$



$$159. \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$

$$160. \begin{cases} \frac{2}{x} = 5 - \frac{5}{y} \\ \frac{7}{y} = \frac{1}{x} - 12 \end{cases}$$

$$161. \begin{cases} (y-2x)(x+y) = 0 \\ x-2y = 3 \end{cases}$$

$$162. \begin{cases} (3y-x)(5y-2x+3) = 0 \\ x-2y = 2 \end{cases}$$

$$163. \begin{cases} (2x+y+6)(x+2y-3) = 0 \\ (x-y+6)(2x-y) = 0 \end{cases}$$

$$164. \begin{cases} |x-2y| = 3 \\ 4x-5y = 6 \end{cases}$$

$$165. \begin{cases} 2|x|-3|y| = 13 \\ |x|-2|y| = 5 \end{cases}$$

$$166. \begin{cases} |2y-x| - |2x-y| = 0 \\ x+2y = -3 \end{cases}$$



Μονοτονία

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

• Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

• Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονοτονία :

Έστω $x_1 < x_2$ και δούλεψε κατασκευαστικά για να καταλήξεις στη σχέση $f(x_1); f(x_2)$

Να βρεις τη μονοτονία των συναρτήσεων :

167. $f(x) = 6 - 7x$

168. $g(x) = -\frac{5-8x}{3}$

169. $h(x) = 4 - \sqrt{5-x}$

170. $f(x) = 1 - \sqrt{2x+4}$

171. $g(x) = \frac{2}{x} - 1$

172. $h(x) = 1 - \frac{5}{3-x}$

173. $g(x) = \sqrt{2-x} + 3$

174. $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{3-x}}$

175. $h(x) = -\frac{5-3x}{3}$

176. $f(x) = x(6-x), x \in (-\infty, 3]$

177. $f(x) = -2x^4 + 3, x \in (0, +\infty)$

178. $f(x) = 3x^5 - 1, x \in (-\infty, 0]$

179. $f(x) = x^2 + 4x, x \in (-\infty, -2]$

180. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :



- $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$
- $f(x) = \frac{x-x^2}{12+3x}$
- $f(x) = \frac{x^2-7}{2x-8}$
- $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$
- $f(x) = 2x^2 + \sqrt{14-2x}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$
- $f(x) = \sqrt{-x^2-2x+8}$

181. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+5}$
- $f(x) = \frac{4x}{x-3} + \frac{2x-7}{x^2+3x-4}$
- $f(x) = \frac{6-4x}{x^2-9} - \frac{2x}{x^2+4x+3} - \frac{5}{2}$
- $f(x) = \frac{2x+6}{|2x-1|-5}$
- $f(x) = \frac{x+1}{5-|-1-3x|}$
- $f(x) = \frac{2x+7}{5+|-1-3x|}$
- $f(x) = \frac{x+3}{|x-2|-|2x-1|}$

182. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = \frac{x+3}{x^2+8}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x^2-9x}$
- $g(x) = \frac{2x+7}{x^2-4x^2+4x}$
- $g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x}$
- $h(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$
- $h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2}$

183. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$



- $g(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$
- $g(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$
- $h(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$
- $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

184. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = 6 - 2x$
- $f(x) = 3 + 5x$ iii. $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = \sqrt{6-2x} + 3$
- $f(x) = x^2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x}$
- $f(x) = x^3 + 2x + 1$
- $f(x) = \sqrt{3-\sqrt{3-x}}$

185. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = \frac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$
- $f(x) = x^3 - \sqrt{3-2x}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- $f(x) = \sqrt{6-2x} + 3$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = 1 - 2x^3 - 3x$
- $f(x) = x^3 - \sqrt{2-x} + 5x$

186. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$.

187. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση :

- $f(x) = (2\lambda - 8)x + 3$ είναι γνησίως αύξουσα.
- $f(x) = (6 - 3\lambda)x - 25$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- $f(x) = (7 - |3 - 2\lambda|)x - 9$ είναι γνησίως αύξουσα.



- $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x + 72$ είναι γνησίως αύξουσα.
- $f(x) = (-2\lambda^2 + 6\lambda - 9)x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα.

188. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

- η συνάρτηση : $f(x) = (\lambda^2 - 2\lambda - 15)x - 2018$ είναι γνησίως φθίνουσα
- η συνάρτηση $g(x) = (|2\lambda - 1| - |\lambda + 2|)x + 2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

189. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty, 1)$.

190. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x + 3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

191. Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(-2x + 3)$.

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - \sqrt{x} + \frac{\alpha+6}{x}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(4, -33)$ να δείξετε ότι $\alpha = -2$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

193. Να λυθεί η εξίσωση : $2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$

194. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(6, 1)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = -6$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} - 1$

195. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{8}{x^3} - 3\sqrt{x-1}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $8 + 2x^3 = 3x^3\sqrt{x-1}$

196. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \sqrt{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) + f(4) = 12$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 12$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{12}{|2x-1|+1} - \frac{12}{|x+4|+1} = \sqrt{|2x-1|+1} - \sqrt{|x+4|+1}$.

197. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x^2}{\sqrt{x}} - x < 4$.



- Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.
198. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x} + x$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5} - \sqrt{3|x|+1} < 2|x| - 4$.
199. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 + x$.
- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λυθεί η ανίσωση : $(x^2 - 3)^3 - (2x + 1)^3 < \frac{-x^2+2x+4}{3}$.
200. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = -2x^3 - 3x + 5$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε τις ανισώσεις :
- $f(x - 4) < f(3x)$
- $f(|x|) > 0$
- $f(x^2 - 5) - f(3 - 2x) > 0$.
201. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λυθούν οι ανισώσεις :
- $f(2x + 3) < f(4x - 1)$
- $f(x^2 - 2x) < f(x - 2)$
202. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008) < f(2004)$.
- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(5 - 3x) \leq f(x^2 + x)$.
203. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007) < f(2000)$.
- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(3x - 2) \geq f(x^2)$.
204. Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 1) < 2$,
- αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
205. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι :
- $f(x) + f(5x) < f(3x) + f(6x)$, για κάθε $x > 0$
- $f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^5)$, για κάθε $x \in (0, 1)$.
206. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(a^2 + 1) \leq f(2a)$.
207. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 5)$.



- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση : $f(|x| - 3) \geq 2$

208. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$.

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$.

209. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3x^{2019} + 2x^{2017} + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x)) < 6$.
- Να αποδείξετε ότι : $f(13) - f(12) < f(14) - f(11)$.

210. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x+1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(-2, 5)$ και $N(-4, 3)$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να δείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = -1$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta = (-1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι : $f(3) - f(2) < f(4) - f(1)$.



Ακρότατα

6. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) ακρότατα της f .

Να βρεις τα ακρότατα των συναρτήσεων :

211. $f(x) = 3 - 2|x - 2|$

212. $f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$

213. $f(x) = -3x^2 + 5$

214. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x}$ (υπόδ: ν.δ.ο. $x + \frac{1}{x} \geq 2$)

215. $f(x) = 2 - \sqrt{4x^2 - 4}$

216. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8}$

217. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$ (υπόδ: ν.δ.ο. $x - \frac{1}{x} \leq -2$)

218. $f(x) = 3(x - 4)^2 + 2$

219. $f(x) = 1 - \sqrt{2x - 6}$

220. $f(x) = x^2 - 4x$

221. $f(x) = 3 - 2(x - 3)^8$

222. $f(x) = x^2 + 6x + 5$

223. $f(x) = -x^2 + 3x$

224. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3}$, να αποδείξεις ότι έχει για ελάχιστο το $\frac{2}{3}$ και μέγιστο το 2

225. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$, να βρεις μονοτονία και ακρότατα όταν x ανήκει :

• $[-2, 1]$

Ακρότατα :

Ψάξε για θετική ποσότητα όπως $|x|, x^2, \sqrt{x}$ και άρχισε να κατασκευάζεις τη συνάρτηση



- $(-1, 3]$
- $(-\infty, 3]$

226. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια τότε να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι άρτια, περιττή ή τίποτα απ' τα δύο.

227. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 7 - 2x - \sqrt{x-2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- Μονοτονία
- Ακρότατα

228. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a-x} - 3x$, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε σημείο με τεταγμένη 2, να βρεις :

- Την τιμή του a
- Πεδίο ορισμού
- Μονοτονία
- Ακρότατα

229. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- Μονοτονία στα διαστήματα : $[-4, 0], [0, 4]$

230. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = \frac{1}{f^2(x)+3}$, $f(0)=0$

231. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{4}{x}$, με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

232. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_1 = 1$ και ελάχιστο για $x_2 = -1$.

233. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x-2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

234. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

235. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 2x^3 + 3$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

236. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ έχει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη 1 .

237. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- $f(x) = x^6 + 5$
- $f(x) = 3|x-1| - 2$
- $f(x) = 2 - 3|x-1|$
- $f(x) = 5 - (x+2)^4$
- $f(x) = 7 - \frac{4}{|x+3|+2}$



- $f(x) = \sqrt{6-2x} - 3x$
- $f(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}$
- $f(x) = -x^2 + 4|x| - 1$
- $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12$

238. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$
- $f(x) = -3x^2 + 18x - 5$
- $f(x) = x^2 + 6x$
- $f(x) = -x^2 + 2x$

239. Να βρείτε :

- το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$.
- το μέγιστο της συνάρτησης $g(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_g = (-\infty, 0)$.

240. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

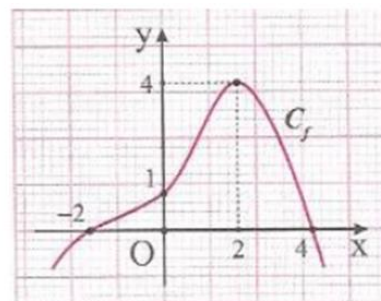
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

241. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 4$ και $g(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2+4}}$.

- Να βρείτε το ελάχιστο της f .
- Να βρείτε το μέγιστο της g .
- Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $7f(\alpha) - 5g(\beta) \geq 20$

242. Για τη συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος, να βρείτε :

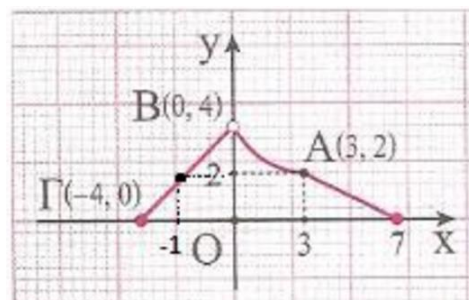
- τα ακρότατα
- τα διαστήματα μονοτονίας
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- την τιμή $f(0)$
- Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(3)$ και $f(\pi)$



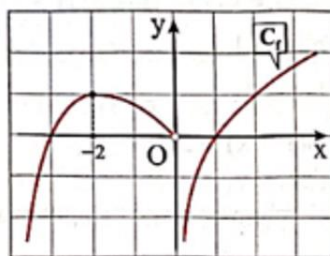


243. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

- να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ .
- να βρείτε για ποια τιμή του x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.
- να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 2$.
- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.



244. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να γράψετε το πεδίο ορισμού της και τα διαστήματα μονοτονίας της f .



245. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες είναι γνησίως φθίνουσες.

- $f(x) = 6 - 2x$
- $f(x) = 3 + 5x$
- $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = 5 - 4x^3$
- $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$
- $f(x) = 2\sqrt{x - 1} + 4$
- $f(x) = (x - 1)^3 - 2$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

246. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = (x - 1)^2 + 2, \quad x \geq 1$
- $f(x) = (x + 1)^2 - 1, \quad x \leq -1$
- $f(x) = x^2 - 6x + 3, \quad x \geq 3$
- $f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

247. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

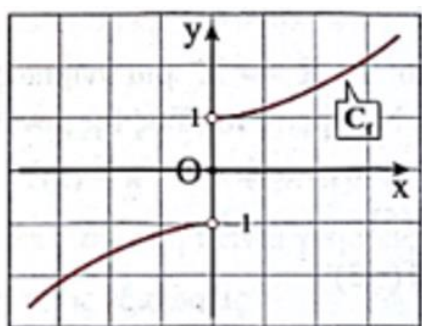
- $f(x) = x^3 + x + 1$
- $f(x) = x^5 + x - 2$



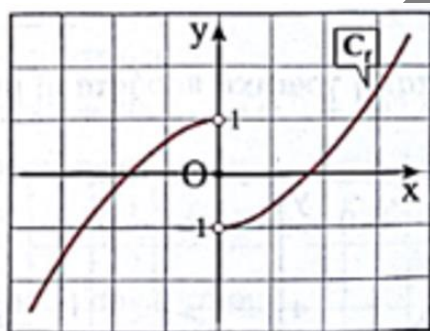
- $f(x) = -x^3 + 2 - x$
- $f(x) = \sqrt{x-1} + x + 3$
- $f(x) = 2\sqrt{3-x} - x + 1$
- $f(x) = \frac{1}{x-1} - x + 1, \quad x > 1$

248. Η συνάρτηση f ορίζεται στο: $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

και είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Να εξετάσετε στις παρακάτω περιπτώσεις αν η f είναι γνησίως αύξουσα στην ένωση: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



και



249. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

- $f(x) = x^2 + 2x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$.
- $g(x) = \frac{2}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$, όχι όμως γνησίως μονότονη στο D_g .

250. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:

- $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

251. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ -\frac{3}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \geq 0 \\ x + 3, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

252. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(1) < f(5)$



- $f(x^2) < f(-3)$
- $f(4) - f(2) > 0$
- $f(x^2 + 1) - f(x^2 + 3) > 0$

253. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες είναι γνησίως φθίνουσες.

- $f(x) = 2e^{x-1} + 1$
- $f(x) = 3e^{2-x} - 1$
- $f(x) = 2\ln x - 3$
- $f(x) = 3\ln(1-x) + 2$

254. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

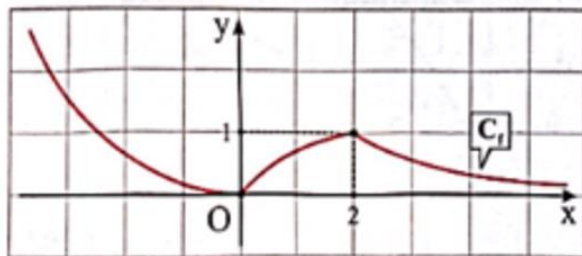
- $f(x) = x + \ln x + 1$
- $f(x) = e^{x-1} + x - 2$
- $f(x) = 2e^{1-x} + 1 - x$
- $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x-1) + 2$

255. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{x+1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
- Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g .

256. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f : (Σημείωση: Το σχήμα παραλείπεται)

- Να γράψετε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών της f .
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι $f(\pi) < f(e)$.
- Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
 $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$



257. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(\alpha^2 + \beta^2) \geq f(2\alpha\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $f(x^2 + 1) < f(x^2 + 4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$



- $f(x^2 + 4) \geq f(4x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta) \geq f(-\beta^2)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

258. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(2x - 1) > f(x + 4)$
- $f(x^2 - 1) \geq f(3)$
- $f(x^2 - 3x) < f(2x - 6)$
- $f(3x - x^2) \leq f(2)$
- $f(|x|) \geq f(2)$
- $f(|x - 2| + 1) \leq f(5)$

259. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(|2x + 1| - 5) \geq f(2)$
- $f(x^2 + 4) > f(13)$
- $f(3 - |x|) < f(1 + |x|)$
- $f(x^4) \geq f(3x^2 + 4)$

260. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(x^3 + 3x^2) \geq f(4)$
- $f(2x^3 + 6) \geq f(4x^2)$

261. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(x^2 - 3x) = f(2x - 6)$
- $f(x^3 + 4) = f(x^2 + 4x)$

262. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(2004) > f(2022)$$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(3)$.

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(3x - 2) > f(8 - 2x)$
- $f(x^5) > f(x^3)$
- Να αποδείξετε ότι: $f(\alpha^2 + \beta^2) \leq f(2\alpha\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

263. Μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει ότι $f(1) - f(3) > 0$.



- Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - x) > f(2x - 2)$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(2\eta\mu x) = f(1)$.

264. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(4 - x) + f(2 + x) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) > f(2)$$

Να λύσετε:

- την εξίσωση $f(x) = 0$,
- την ανίσωση $f(x^2 - 6) > 0$.

265. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 + 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(x) = 0$
- $x = \frac{4}{x^4 + 3}$
- Να αποδείξετε ότι: $f(x^{10} + 2004) < f(x^{10} + 2022)$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 - 5x + 7) < 0$

266. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^9 + 3x^5 - 4$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(x) = 0$
- $x^5 = \frac{4}{x^4 + 3}$
- Να λύσετε την ανίσωση $x^5 \leq \frac{4}{x^4 + 3}$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) < f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) + 1) \geq 0$.



267. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^7 + 8x^5 - 8$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $x^7 + 8x^5 = 9$.
- Να λύσετε την ανίσωση $x^5 \leq \frac{9}{x^2+8}$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) \geq 1$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(2x - 1)$ είναι γνησίως αύξουσα
- να λύσετε την ανίσωση $g(|x - 1|) \leq f(3)$.

268. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x - 8$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x) + 8f(x) \leq 9$.

269. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(2^x + 3) \leq f(5)$
- $f(e^{2-x} + 3) < f(4)$
- $f(\ln x) \leq f(1)$
- $f(\ln(x^2 + 1)) > f(\ln 5)$

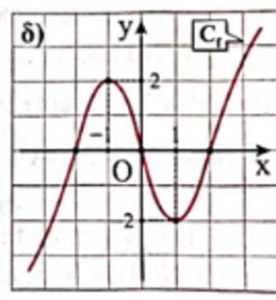
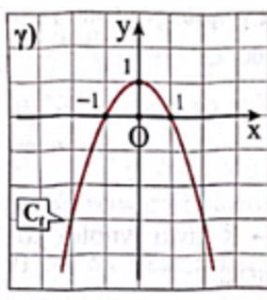
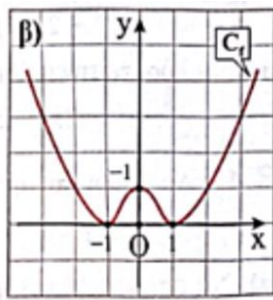
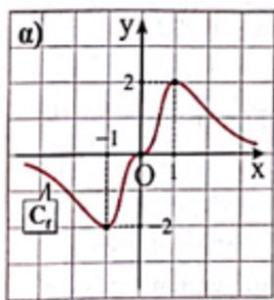
270. Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(\ln x + 2) = f(3)$
- $f(2^{x+1} + 1) = f(9)$
- $f(\ln^2 x) = f(\ln x)$
- $f(3^{2x} + 9) = f(10 \cdot 3^x)$

271. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(5) < f(4)$.

- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x) < f(1)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(3) > f(5) + f(7)$.

272. Στα επόμενα σχήματα να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστο ή ελάχιστο. Αν έχει, να βρείτε ποιο είναι αυτό και σε ποια θέση παρουσιάζεται.



273. Να αποδείξετε ότι:

- το 1 είναι το ελάχιστο της συνάρτησης: $f(x) = (x-2)^2 + 1$
- το 3 είναι το μέγιστο της συνάρτησης: $f(x) = 3 - |x-1|$
- η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.
- η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

274. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, με $x > 0$, παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$.
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, με $x < 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$.
- $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$.
- $f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

275. Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(A)$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(A) = [2, 5]$
- $f(A) = (1, 3]$
- $f(A) = [-2, +\infty)$
- $f(A) = (-\infty, 4)$

276. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = |x-1| - 3$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = -x^2 + 4$
- $f(x) = x^2 - 4x + 5$
- $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
- $f(x) = 2x - 3, \quad D_f = [-1, 3]$
- $f(x) = 3 - 2x, \quad D_f = [-2, 5]$
- $f(x) = \frac{10}{x+3}, \quad D_f = [-1, 2]$



- $f(x) = x^2 + 2, \quad D_f = [-1, 1]$

277. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$
- $f(x) = \sqrt{2-x} - 1$

278. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων, καθώς και τις θέσεις στις οποίες αυτά παρουσιάζονται:

- $f(x) = 2\eta\mu x$
- $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 1$

kglykos.gr



Ένθετο για Γ Λυκείου

279. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = 2f(x) + 3$
280. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = -f(x) - 3$
281. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = 3f(x) + 2 - 3x$
282. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = 3 - f(x) - x$
283. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = \frac{2}{f(x) + 3}$
284. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = \frac{-1}{3 - f(x)}$
285. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow, x > 0, f(x) < 2$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = \frac{3+x}{2-f(x)}$
286. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow, x > 0, f(x) > 2$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = \frac{3+x}{2-f(x)}$
287. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow, g \uparrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = f(x) + g(x)$
288. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow, g \uparrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = 2f(x) - 3g(x)$
289. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow, g \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = -f(x) + 3g(x) + 2$
290. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow, g \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = -f(x) + 3g(x) - 2x + 3$
291. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow, g \uparrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = -f(x) + 3g(x) + 2$
292. Δίνονται συναρτήσεις $f \downarrow, g \uparrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 3x, & x > 0 \\ x^2 - 3g(x), & x \leq 0 \end{cases}$
293. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = f^2(x) + 3, f(0) = 0$
294. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = |f(x)| - 3, f(1) = 0$
295. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = \sqrt{f(x)} + 5, f(2) = 0$
296. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = -2f^2(x) + 3, f(0) = 0$
297. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = 1 - 2|f(x)|, f(0) = 0$
298. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = f^2(x) + 2f(x) + 3, f(3) = -1$
299. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = f^2(x) - 4f(x) + 3, f(3) = 2$
300. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = -f^2(x) + 2f(x) + 3, f(1) = 1$



7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι είναι άρτια ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι είναι άρτια όταν :

- $\forall x \in A_f \Rightarrow -x \in A_f$
- $f(-x) = f(x)$

8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι είναι άρτια ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι είναι περιττή όταν :

- $\forall x \in A_f \Rightarrow -x \in A_f$
- $f(-x) = -f(x)$

301. Να εξετάσεις αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις :

$$\bullet f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 9}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x-5}{x^2-1}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

$$\bullet f(x) = |x-4| + |x+4|$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$$

$$f(x) : A - \Pi - T - A - T - A - A$$

302. Να βρεις συμμετρία των συναρτήσεων :

$$f(x) = x^4 + 2x^2, g(x) = x^3 + 3x, h(x) = 2x^5 - 3x^3$$

303. $f(x) = \frac{x^3 |x - x^2|}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Άρτια : $f(-x) = f(x)$

Περιττή : $f(-x) = -f(x)$

Το νου σου : θα πρέπει

$$\forall x \in A_f \Rightarrow -x \in A_f$$

Γεωμετρική ερμηνεία : στην άρτια έχεις συμμετρία ως προς $\psi\psi'$ ενώ στην περιττή έχεις συμμετρία ως προς αρχή των αξόνων



$$304. f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$305. f(x) = |x - 7|$$

$$306. f(x) = \frac{1}{\sigma \nu \nu x}$$

$$307. f(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

$$308. f(x) = 2x^3 - x + 1$$

$$309. f(x) = \log x^2$$

$$310. f(x) = x^3 - x|x|$$

$$311. f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2} + x \cdot \sqrt[3]{(2+x)^2}$$

$$312. f(x) = x^2 + \eta \mu x$$

$$313. f(x) = x(1 - |x|) + 1$$

$$314. f(x) = \begin{cases} -3x + 4 & , x < 0 \\ 3x + 4 & , x > 0 \end{cases}$$

$$315. f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 17$$

$$316. f(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

$$317. f(x) = \begin{cases} 1-x & , x < 0 \\ x+1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$318. f(x) = \frac{x - |x|}{2}$$

$$319. f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 8}$$

$$320. f(x) = \frac{x^5 + x^3}{x^2 + 1}$$

$$321. f(x) = |x+1| + |x-1| + 2$$

$$322. f(x) = \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{(x+1)^2}}{|x| + |x+1|}$$

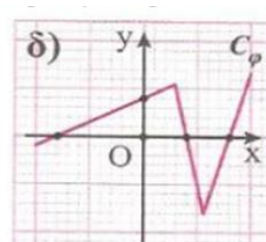
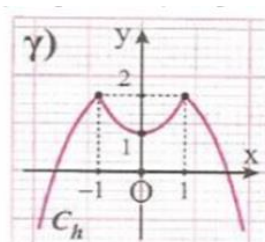
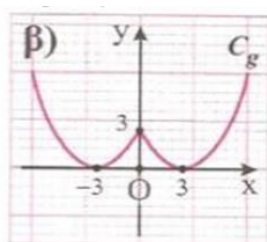
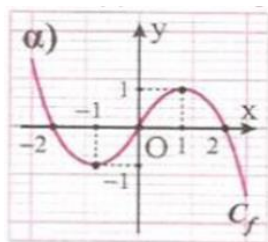
$$323. f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$$

$$324. f(x) = \frac{2(x^2 + x)}{|x| - x}$$

$$325. f(x) = \frac{4x}{x - |x|}$$



326. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



327. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

- $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$
- $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 2x$
- $f(x) = |2x - 1| - |2x + 1|$
- $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

328. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}+3}{x}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- στη συνέχεια να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

329. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι άρτιες ούτε περιττές.

- $f: (-3,4) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- $f(x) = x^2 + x$

330. Δίνεται η περιττή συνάρτηση : $f(x) = ax^2 + (a-2)x^3 + (a-1)x$.

- Να δείξετε ότι $a = 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 3$.
- Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία $A(-\kappa, \lambda)$ και $B(\kappa, 36 - 3\lambda)$ να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

331. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

332. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + a|x|}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$.

- Να δείξετε ότι $a = -2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

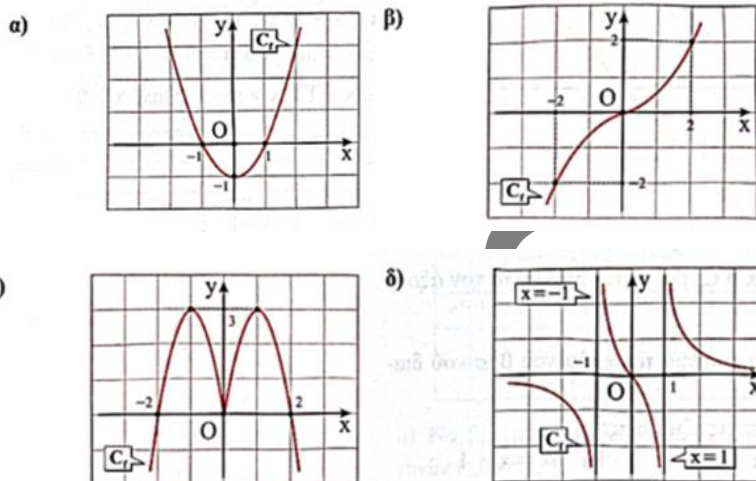


- Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 \leq \frac{f(999)}{f(-999)} x$.

333. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την τιμή $f(0)$
- Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

341. Ποιες από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις ανήκουν σε άρτιες και ποιες σε περιττές συναρτήσεις;



342. Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια και ποια είναι περιττή.

- $f(x) = |x-2| - |x+2|$
- $f(x) = x^2 + x \ln x$
- $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1, \quad x \in [-1, +\infty)$
- $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < -1 \\ x^4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

343. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές και να βρείτε τις συμμετρίες της C_f σε κάθε περίπτωση.

- $f(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{|x-1| + |x+1|}$
- $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+2}$
- $f(x) = \begin{cases} 1-x+x^2, & \text{αν } x \leq -1 \\ 1+x+x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & \text{αν } x \leq -2 \\ -x^2 + 4x - 5, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

344. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Να υπολογίσετε το $f(-1)$, όταν η f είναι:



- άρτια,
- περιττή.

345. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(10^{10}) + f(-10^{10})$

346. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- Να αποδείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το: $D_f = \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή. γ) Πού τέμνει η C_f τον άξονα x' ;

347. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 8)$.

- Αν η f είναι περιττή, να υπολογίσετε τα $f(0)$ και $f(-1)$.
- Αν η f είναι άρτια, να υπολογίσετε το $f(-1)$.
- Αν η f είναι περιττή, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(-\alpha) + f(\alpha) + f(0)$.
- Αν η f είναι άρτια, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = f(-\alpha) - f(\alpha)$.

348. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $f(x) = x - 2$
- $f(x) = 3 - 2x$
- $f(x) = |x + 1|$
- $f(x) = |1 - x|$

349. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

350. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $f(x) = \eta\mu 2x$
- $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$
- $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$
- $f(x) = -2\eta\mu x + 3$

351. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in [0, 2\pi]$

- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .



- Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g .
- Να βρείτε για ποια $x \in [0, 2\pi]$ η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .
- Να λύσετε την ανίσωση: $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$

352. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{αν } x \leq -1 \\ 3x, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

kglykos.gr



Παραγωγή συναρτήσεων

Να υπολογίσεις τις παραγώγους των συναρτήσεων

353. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 2$

354. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$

355. $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 1)$

356. $f(x) = x^3 + \eta\mu x - 3x$

357. $f(x) = x\epsilon\phi x$

358. $f(x) = x + 2\eta\mu x$

359. $f(x) = x + 2\eta\mu 3$

360. $f(x) = \frac{x}{3}$

361. $f(x) = \frac{x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$

362. $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$

363. $f(x) = \frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$

364. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

365. $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$

366. $f(x) = x - \ln x$

367. $f(x) = \frac{xe^x}{x+1}$

368. $f(x) = x^2\eta\mu x$

369. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$

370. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$

$(1)' = 0$ $(x)' = 1$ $(x^2)' = 2x$ $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$(2)' = 0$ $(2x)' = 2$ $(x^3)' = 3x^2$ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(a)' = 0$ $(ax)' = a$ $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(e^x)' = e^x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Κανόνες παραγώγισης

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$



$$371. f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

$$372. f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{1 - x}$$

$$373. f(x) = 3 + 2\eta\mu x$$

$$374. f(x) = \frac{\eta\mu x}{3}$$

$$375. f(x) = \frac{3}{x}$$

$$376. f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$

$$377. f(x) = \frac{3x-1}{e^x}$$

$$378. f(x) = x \ln x - x + 1$$

$$379. f(x) = x^3(2 + \sqrt{x})$$

$$380. f(x) = (2x - x^3)\sqrt{x}$$

$$381. f(x) = x^2 \ln x$$

$$382. f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$383. f(x) = \frac{x^3(x+1)}{x^2+1}$$

$$384. f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$$

$$385. f(x) = x(x^2+1)(x^2-2x)$$

$$386. f(x) = x^3 \ln x$$

$$387. f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$388. f(x) = \frac{4-x}{3+x}$$

$$389. f(x) = \frac{x}{2 + \eta\mu x}$$

$$390. f(x) = x \ln x - x$$



$$391. f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

$$392. f(x) = \frac{e^x}{1 + \sqrt{x}}$$

$$393. f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{5}} + \frac{1}{x^3}$$

$$394. f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2}{4x^2 + 1}$$

$$395. f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$396. f(x) = (4x^3 - 3x^2) \ln x$$

$$397. f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2 + 1}$$

$$398. f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$399. f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

$$400. f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$401. f(x) = \frac{x^2 + 9}{5}$$

$$402. f(x) = x \eta \mu x$$

$$403. f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$404. f(x) = \frac{2x+1}{e^x}$$

$$405. f(x) = x^2 + \sigma \upsilon \nu x - 2$$

$$406. f(x) = \sqrt{x} \eta \mu x + \frac{\ln x}{x-1}$$

$$407. f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$$

$$408. f(x) = \sqrt{x} \ln x$$



A7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ έχουμε: $(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$.

A8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ έχουμε: $(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Σημείωση- Τύπος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

A9.Θεώρημα

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

Απόδειξη

α) Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

β) Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

γ) Πράγματι:



— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \text{ και άρα } (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

33. Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας u ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $u'(t_0)$, της ταχύτητας u ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $u'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$, δηλαδή: $a(t_0) = u'(t_0) = s''(t_0)$.

β) Στην οικονομία το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 .



Μονοτονία , ακρότατα συναρτήσεων

10. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) ακρότατα της f .

A12. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ μπορεί να ισούται και με το μηδέν. Παράδειγμα: $f(x) = x^3$



37. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

α) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f .

β) Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .

Σχόλιο

α) Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά ακρότατα αυτής.

β) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

δ) Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

Να υπολογίσεις τη μονοτονία και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

409. $f(x) = x^3 + 3x - 4$

410. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

411. $f(x) = \ln x - 1$

412. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

413. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

414. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

415. $f(x) = x^2 - 8x$

416. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 1$

417. $f(x) = x^2 - 2x$

418. $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

Μονοτονία – Ακρότατα

- Υπολογίζω $f'(x)$
- Λύνω $f'(x) = 0$
- Φτιάχνω πινακάκι για $f'(x)$

Πεδία Ορισμού

- $\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$
- $\sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$
- $\ln f(x) \Rightarrow f(x) > 0$



419. $f(x) = 4x - x^2$

420. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{3x}$

421. $f(x) = \frac{4x^2 + 21}{x - 1}$

422. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

423. $f(x) = x - e^x$

424. $f(x) = -x^2 + 2x - 1, x \in (-1, 2]$

425. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

426. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

427. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

428. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

429. $f(x) = xe^x$

430. $f(x) = x \ln x$

431. $f(x) = 2 - 2x^3$

432. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

433. $f(x) = -3x^2 + 6$

434. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

435. $f(x) = 3x + 2$

436. $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 3$

437. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$

438. $f(x) = \ln x - x$

439. $f(x) = x^2 e^x$

440. $f(x) = \frac{x + 3}{2x - 1}$

441. $f(x) = \frac{x}{3}$

Το νου σου ...

- $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$
- $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$
- $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0$



$$442. f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$$

$$443. f(x) = x - \ln x$$

$$444. f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$$

$$445. f(x) = \frac{3-x}{2+x}$$

$$446. f(x) = \frac{3}{x}$$

$$447. f(x) = \frac{3x-1}{e^x}$$

$$448. f(x) = x \ln x - x + 1$$

$$449. f(x) = x^2 \ln x$$

$$450. f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$451. f(x) = x^3 \ln x$$

$$452. f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$453. f(x) = \frac{4-x}{3+x}$$

$$454. f(x) = x \ln x - x$$

$$455. f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$456. f(x) = (4x^3 - 3x^2) \ln x$$

$$457. f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$458. f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

$$459. f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$460. \text{ Αν } f \uparrow, \text{ να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης } g(x) = 3 - 2x - f(x)$$

$$461. \text{ Αν } f \downarrow, f(x) \leq 3, \text{ να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης } g(x) = 3 - 2\sqrt{3 - f(x)}$$



462. Δίνονται συναρτήσεις $f \uparrow, g \downarrow$, να βρεις τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = -f(x) + 3g(x) - 2x + 3$
463. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = 1 - 2|f(x)|, f(0) = 0$
464. Να βρεις ακρότατα της $h(x) = f^2(x) + 2f(x) + 3, f(3) = -1$
465. Αν $f \uparrow, f(2) = 0$, να βρεις το πρόσημο της συνάρτησης
466. Αν $f \downarrow, f(3) = 0$, να βρεις το πρόσημο της συνάρτησης

kglykos.gr



Σύνθετη παραγώγιση

Να υπολογίσεις τις παραγώγους των συναρτήσεων

467. $f(x) = \eta\mu^3 x$

468. $f(x) = e^{x^2+1}$

469. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

470. $f(x) = \eta\mu 3x$

471. $f(x) = e^{-x}$

472. $f(x) = \eta\mu(x^2 - 5x + 1)$

473. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$

474. $f(x) = e^{6-5x^2}$

475. $f(x) = \ln(3x + 3)$

476. $f(x) = \ln \sqrt{x+1}$

477. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

478. $f(x) = \eta\mu(x+1)$

479. $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$

480. $f(x) = \ln(\eta\mu x)$

481. $f(x) = e^{x+x^2}$

482. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

483. $f(x) = e^{2x} \sigma\upsilon\nu x$

484. $f(x) = \varepsilon\phi 2x$

485. $f(x) = x\eta\mu 3x$

486. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

487. $f(x) = \eta\mu^2 x$

488. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$

489. $f(x) = \ln \sqrt{2x-1}$



$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$

$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$

$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$

$(f(x))^v = v(f(x))^{v-1} \cdot f'(x)$

$(\varepsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)$

$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

$(\sigma\phi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} f'(x)$



490. $f(x) = (x^2 - 1)^3$

491. $f(x) = \eta\mu^3 x$

492. $f(x) = \sqrt{\varepsilon\varphi\chi}$

493. $f(x) = \sigma\upsilon\nu e^x$

494. $f(x) = e^{x+3}$

495. $f(x) = \ln(x^3 + x)$

496. $f(x) = \eta\mu^5(\ln x)$

497. $f(x) = \sqrt{\eta\mu 2x}$

kglykos.gr



Μονοτονία, ακρότατα σύνθετων συναρτήσεων

Το νου σου ...

- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = \dots$

Να βρεις μονοτονία και ακρότατα

498. $f(x) = e^x + 2$

499. $f(x) = \ln(x-2)$

500. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

501. $f(x) = (x-1)^3$

502. $f(x) = (x-2)^4$

503. $f(x) = (x^2 - 2x)^3$

504. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

505. $f(x) = x \ln 2x$

506. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

507. $f(x) = (x-3)e^{-x}$

508. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

509. $f(x) = e^{5x}$

510. $f(x) = e^{3x^2 + 7x}$

Να βρεις πεδίο ορισμού και μονοτονία, ακρότατα

511. $f(x) = -x^3 + 3x$

512. $g(x) = -4x + 4$

513. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

514. $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2022$

515. $g(x) = \sqrt{3 - 3x^2}$

516. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

517. $h(x) = \sqrt{8x - x^2}$

Να βρεις παραγώγους των συναρτήσεων :

518. $f(x) = \eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu 2x$

519. $f(x) = x^2 - \eta\mu x 3x$



520. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

521. $f(x) = x^2 \sqrt{2x}$

522. $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

523. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

524. $f(x) = \sin 3x \eta \mu 2x$

Να βρείτε μονοτονία ,ακρότατα (πρώτα πεδίο ορισμού)

525. $f(x) = -x^3 - 3x$

526. $h(x) = x^2 - 6x + 9$

527. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2022$

528. $g(x) = (x-1)^{20}$

529. $h(x) = (1-x)^{21}$

530. $f(x) = (x-x^2)^2$

531. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

532. $h(x) = (3-6x)^5$

533. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες είναι γνησίως φθίνουσες.

- $f(x) = 6 - 2x$
- $f(x) = 3 + 5x$
- $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = 5 - 4x^3$
- $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$
- $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 4$
- $f(x) = (x-1)^3 - 2$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

534. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = (x-1)^2 + 2, \quad x \geq 1$
- $f(x) = (x+1)^2 - 1, \quad x \leq -1$
- $f(x) = x^2 - 6x + 3, \quad x \geq 3$
- $f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

535. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = x^3 + x + 1$



- $f(x) = x^5 + x - 2$
- $f(x) = -x^3 + 2 - x$
- $f(x) = \sqrt{x-1} + x + 3$
- $f(x) = 2\sqrt{3-x} - x + 1$
- $f(x) = \frac{1}{x-1} - x + 1, \quad x > 1$

536. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

- $f(x) = x^2 + 2x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$,
- $g(x) = \frac{2}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$, όχι όμως γνησίως μονότονη στο D_g .

537. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:

- $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

538. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ -\frac{3}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \geq 0 \\ x + 3, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

539. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(1) < f(5)$
- $f(x^2) < f(-3)$
- $f(4) - f(2) > 0$
- $f(x^2 + 1) - f(x^2 + 3) > 0$

540. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες είναι γνησίως φθίνουσες.

- $f(x) = 2e^{x-1} + 1$
- $f(x) = 3e^{2-x} - 1$
- $f(x) = 2\ln x - 3$



$$f(x) = 3\ln(1-x) + 2$$

541. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x + \ln x + 1$$

$$f(x) = e^{x-1} + x - 2$$

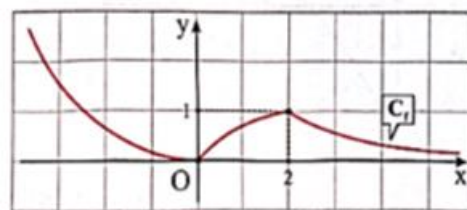
$$f(x) = 2e^{1-x} + 1 - x$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x-1) + 2$$

542. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
- Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g .

543. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f :



- Να γράψετε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών της f .
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι $f(\pi) < f(e)$.
- Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 3) < f(x^4 + 3)$

544. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(\alpha^2 + \beta^2) \geq f(2\alpha\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $f(x^2 + 1) < f(x^2 + 4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x^2 + 4) \geq f(4x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta) \geq f(-\beta^2)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

545. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(2x - 1) > f(x + 4)$
- $f(x^2 - 1) \geq f(3)$
- $f(x^2 - 3x) < f(2x - 6)$
- $f(3x - x^2) \leq f(2)$



- $f(|x|) \geq f(2)$
- $f(|x-2|+1) \leq f(5)$

546. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(|2x+1|-5) \geq f(2)$
- $f(x^2+4) > f(13)$
- $f(3-|x|) < f(1+|x|)$
- $f(x^4) \geq f(3x^2+4)$

547. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(x^3+3x^2) \geq f(4)$
- $f(2x^3+6) \geq f(4x^2)$

548. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(x^2-3x) = f(2x-6)$
- $f(x^3+4) = f(x^2+4x)$

549. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(2004) > f(2022)$$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(3)$.
- Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $f(3x-2) > f(8-2x)$ ii) $f(x^5) > f(x^3)$
- Να αποδείξετε ότι: $f(\alpha^2+\beta^2) \leq f(2\alpha\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

550. Μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει ότι $f(1) - f(3) > 0$.

- Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-x) > f(2x-2)$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(2\eta\mu x) = f(1)$.

551. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(4-x) + f(2+x) = 0 \text{ και } f(1) > f(2) \text{ Να λύσετε:}$$

- την εξίσωση $f(x) = 0$,
- την ανίσωση $f(x^2-6) > 0$.

552. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 + 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $f(x) = 0$ ii) $x = \frac{4}{x^4+3}$



- Να αποδείξετε ότι: $f(x^{10} + 2004) < f(x^{10} + 2022)$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 - 5x + 7) < 0$

553. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^9 + 3x^5 - 4$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $f(x) = 0$ ii) $x^5 = \frac{4}{x^4 + 3}$
- Να λύσετε την ανίσωση $x^5 \leq \frac{4}{x^4 + 3}$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) < f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) + 1) \geq 0$.

554. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^7 + 8x^5 - 8$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $x^7 + 8x^5 = 9$.
- Να λύσετε την ανίσωση $x^5 \leq \frac{9}{x^2 + 8}$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) \geq 1$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(2x - 1)$ είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $g(|x - 1|) \leq f(3)$.

555. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x - 8$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x) + 8f(x) \leq 9$.

556. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $x^9 + x^7 + x^5 \leq 3$
- $2x^3 + 5x \geq 26$
- $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$
- $\sqrt{x - 1} + 3x \leq 7$



- $\eta\mu x + 1 \geq \sigma\upsilon\eta x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

557. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(2^x + 3) \leq f(5)$
- $f(e^{2-x} + 3) < f(4)$
- $f(\ln x) \leq f(1)$
- $f(\ln(x^2 + 1)) > f(\ln 5)$

558. Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(\ln x + 2) = f(3)$
- $f(2^{x+1} + 1) = f(9)$
- $f(\ln^2 x) = f(\ln x)$
- $f(3^{2x} + 9) = f(10 \cdot 3^x)$

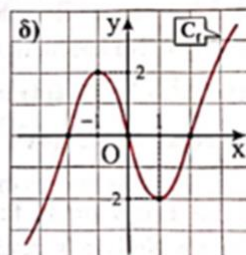
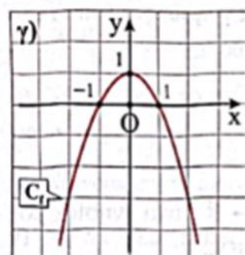
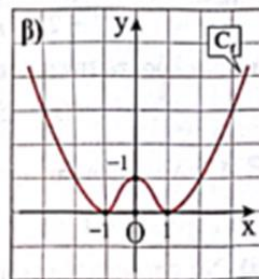
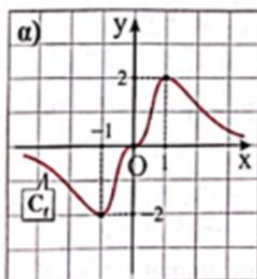
559. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(5) < f(4)$.

- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x) < f(1)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(3) > f(5) + f(7)$.

560. 3.50 Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $x^3 \geq 1 - \ln x$
- $\frac{1}{x} \leq \ln x + 1$
- $e^{1-x} > 1 + \ln x$
- $e^x + 2\ln x < e$

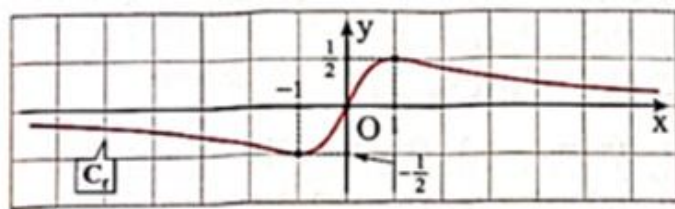
561. Στα επόμενα σχήματα να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστο ή ελάχιστο.





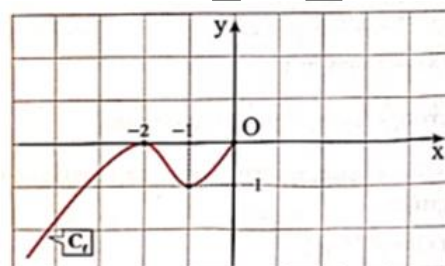
562. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

- Να γράψετε το πεδίο ορισμού A της f και το σύνολο τιμών $f(A)$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ακρότατα της f και να επαληθεύσετε τα συμπεράσματά σας αλγεβρικά.
- Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά ότι η f είναι περιττή.



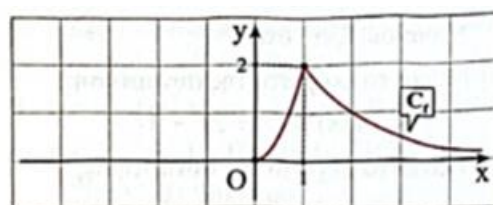
563. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης μιας περιττής συνάρτησης.

- Να συμπληρώσετε τη γραφική της παράσταση.
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(\alpha) + f(-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε τις ανισώσεις: $f(x) > 0$ και $f(x) \leq 0$
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 1$

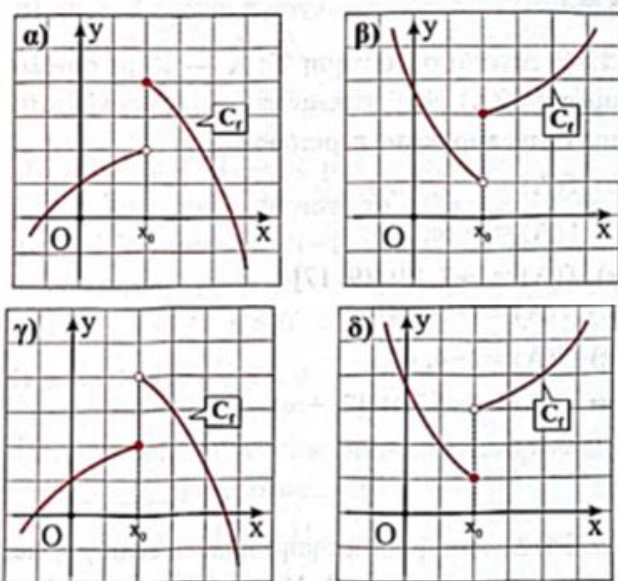


564. Στο επόμενο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης.

- Να συμπληρώσετε τη γραφική της παράσταση.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(3) - f(-3)$
- Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = 1$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 1$



565. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .



566. Ένας μαθητής βρήκε ότι για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:
 $-2022 \leq f(x) \leq 2022$ για κάθε $x \in A$, συμπεράνε έτσι ότι η f έχει ελάχιστο
 το -2022 και μέγιστο το 2022 . Είχε δίκιο;

567. Να αποδείξετε ότι:

- το 1 είναι το ελάχιστο της συνάρτησης: $f(x) = (x-2)^2 + 1$
- το 3 είναι το μέγιστο της συνάρτησης: $f(x) = 3 - |x-1|$
- η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$,
- η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

568. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, με $x > 0$, παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$,
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, με $x < 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$,
- $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$,
- $f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

569. Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(A)$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα
 ακρότατα της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(A) = [-3, +\infty)$
- $f(A) = (-\infty, 2]$
- $f(A) = [-7, 8] \cup (9, 17]$
- $f(A) = (-5, 14]$



- $f(A) = (-4, 4)$
- $f(A) = [-5, 3) \cup [7, +\infty)$

570. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- $f(x) = 2x + 1$
- $(x) = |x - 1| - 3$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = -x^2 + 4$
- $f(x) = x^2 - 4x + 5$
- $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
- $f(x) = 2x - 3, \quad D_f = [-1, 3]$
- $f(x) = 3 - 2x, \quad D_f = [-2, 5]$
- $f(x) = \frac{10}{x+3}, \quad D_f = [-1, 2]$
- $f(x) = x^2 + 2, \quad D_f = [-1, 1]$

571. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$
- $f(x) = \sqrt{2-x} - 1$

572. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων, καθώς και τις θέσεις στις οποίες αυτά παρουσιάζονται:

- $f(x) = 2\eta\mu x$
- $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 1$

573. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- $f(x) = e^{x+1} + 2$
- $f(x) = e^{x+2} - 3$
- $f(x) = \ln(x-2) + 1$
- $f(x) = 2\ln x + 3, \quad D_f = [1, e]$

574. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα A . Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση λf , $\lambda \in \mathbb{R}^*$, είναι:
 - i) γνησίως αύξουσα στο A αν $\lambda > 0$,
 - ii) γνησίως φθίνουσα στο A αν $\lambda < 0$,
- η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι:
 - i) γνησίως φθίνουσα στο A αν: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$
 - ii) γνησίως φθίνουσα στο A αν: $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A$



575. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως μονότονες στο διάστημα A . Να αποδείξετε ότι:

- αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα,
- αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα,
- αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα,
- αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, $f(x) < 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα,
- αν η f είναι γνησίως αύξουσα με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

576. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσες.
- Αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσες.
- Αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσες.

577. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση g στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $g(x) = f(3x - 4)$
- $g(x) = f(5 - 2x)$

578. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση.

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:
 - i) $f(2x) < f(3x)$ για κάθε $x > 0$
 - ii) $f(x) + f(2x) < f(3x) + f(4x)$ για κάθε $x > 0$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι:
 - i) $f(e^x) > f(e^{2x})$ για κάθε $x > 0$
 - ii) $f(e^{2x}) + f(e^{3x}) > f(e^{4x}) + f(e^{5x})$ για κάθε $x > 0$
 - iii) $f(2\ln x) > f(3\ln x)$ για κάθε $x > 1$

579. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

- Αν η f έχει μέγιστο και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $g \circ f$ έχει μέγιστο.
- Αν η f έχει ελάχιστο και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $g \circ f$ έχει μέγιστο.

580. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και έχει ελάχιστο, να αποδείξετε ότι έχει και μέγιστο.



581. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$, γνησίως αύξουσα στο $[\gamma, \beta]$ και ισχύει $f(\gamma) = 0$, να αποδείξετε ότι:

- το $x = \gamma$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης: $f(x) = 0$, $x \in [\alpha, \beta]$
- το 0 είναι ελάχιστο της f στο $[\alpha, \beta]$.

582. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που στο $x_1 = 1$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(1) = 2$ και στο $x_2 = -1$ ελάχιστο το $f(-1) = -2$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(x) - x = \frac{1}{x}$, $x > 0$
- $xf(x) - 1 = x^2$, $x < 0$

583. Δίνονται οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 $g(x) = f(x^2 + 1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι: $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$, $x > 0$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^4 + 2) - f(x^2 + 2) < f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1)$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 3x + 2) > f(x^2 + 3x + 1) - 1$, αν είναι $f(2) - f(1) = -1$.

584. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^5(x) + e^{f(x)} = x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

585. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι: $f(2022) = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + 3$ έχει ελάχιστο.

586. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

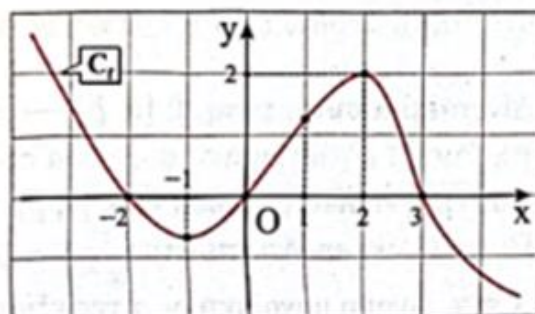
- $f(1), f(2)$
- ii) $f(3), f(\pi)$
- Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^4 + 3) \geq f(x^2 + 3).$$

- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(f(3)) + f(f(2))$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(x) < 0$





- $f(x) \geq 0$

587. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, 5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f(\pi + 2)$ και $f(\pi - 2)$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(\eta\mu 2x) \geq 2$
- $f(x^3 + x^2) \leq 5$
- Να αποδείξετε ότι: $f(\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)) \geq f(\beta^2(\alpha^2 - \beta^2))$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

588. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .
- Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < 0$

Έστω ότι $f(x^2 - x) < f(4x - 6)$. Να αποδείξετε ότι:

- $x \in (2, 3)$
- $\sin 3 < \sin x < \sin 2$
- Να λύσετε την εξίσωση: $\left(2\sin \frac{x}{2} + 1\right)^5 + 4\sin \frac{x}{2} = 1$ όταν $x \in [0, \pi]$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(\eta\mu x) > f(\sin x)$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

589. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- να βρείτε το πρόσημο της f .

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $e^x + x \leq 1$
- $e^x > 1 - x$



- Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x}(1-x) = 1$.

- Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x \geq e^2 + 2$.

590. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $\ln x = 1 - x$

- $x = e^{1-x}$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $\ln x \leq 1 - x$

- $\ln x + x > 1$

- Να αποδείξετε ότι $f(e) < f(\pi)$.

591. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln(x+1)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $f(x) = 0$

- $x + 1 = e^{-x}$, $x > -1$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$

- $x^4 - x^2 < \ln \frac{x^2+1}{x^4+1}$

592. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$



- να βρείτε το πρόσημο της f .
- Για κάθε $0 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι: $e^{\alpha-1} + \ln \frac{\alpha}{\beta} < e^{\beta-1}$
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) < f(x+1)$
- Αν $x > 0$, να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < f(x^3)$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $g(x) = \ln f(x)$ και $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

- $f(\alpha) + f(\alpha+1) < f(\alpha+2) + f(\alpha+3)$
- $f(\alpha) - f(\alpha+3) < f(\alpha+1) - f(\alpha+2)$

593. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(e^4, 2)$. Έστω ακόμη η συνάρτηση: $g(x) = 3f(x) - (f \circ f)(x)$

- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $3f(e^{x-2}) + f(2) < 6 + f(f(e^{x-2}))$

Θεματάκια

594. Δίνεται συνάρτηση συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, όπου $f(1), f(3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0, \text{ να βρεις}$$

- $f(1), f(3)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

595. Δίνεται συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όπου $f(1), f(2), f(3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, να βρεις

- $f(1), f(2), f(3)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

596. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
- $f(x) = x^2 \eta \mu 2x$



- $f(x) = \sqrt{2x} \cdot x^2$

597. Να βρεις τα α, β ώστε η συνάρτηση να διέρχεται από το $A(1,2)$ και να έχει ρυθμό μεταβολής στο $x=1$ με τιμή 5 όταν $f(x) = x^2 + ax + b$.

$$a=3, b=-2$$

598. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

599. Να βρεις μονοτονία και ακρότατα της $f(x) = 12 + 3x - x^3$.

$$x = \pm 1$$

600. Να βρεις μονοτονία και ακρότατα της $f'(x)$ όταν $f(x) = 12 + 3x - x^3$

$$x = 0, \max$$

601. Να βρεις το ρυθμό του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης: $f(x) = x^2(3x+5)$

$$18x+10$$

602. Αν $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow a, b, c = ?$ όταν η συνάρτηση διέρχεται από το $A(-1,2)$, έχει ελάχιστο στο $x=2$ και έχει ρυθμό μεταβολής στο $x=1$ ίσο με 3

$$a = -\frac{3}{2}, b = 6, c = \frac{19}{2}$$

603. Να βρεις μονοτονία και ακρότατα του ρυθμού μεταβολής της $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$

604. Να βρεις τα ακρότατα της $f''(x): f(x) = x^4 - 12x^3$

$$x = 3, \min$$

605. Αν $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$

- Ν.δ.ο. $x^2 f''(x) = 2f(x)$.
- Να βρεις α, β όταν $f(2) = 2, f'(2) = 3$

$$a = \frac{2}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

606. Αν $f(x) = \eta\mu(ax+b) \Rightarrow f''(x) + a^2 f(x) = 0$

607. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$

608. Αν $f(x) = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow f^3(x)f''(x) + 1 = 0$



Μορφή εφαπτομένης (ε)

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0)$$

- $x_0 =$
- $y_0 = f(x_0)$
- $\lambda = f'(x_0)$

Εφαπτομένη συνάρτησης

Θυμίζω : τετμημένη $\rightarrow x, x_0$ τεταγμένη $\rightarrow y, y_0$ (ε) διέρχεται από : x, y (ε) στο : x_0, y_0 (ε) $// \text{ } xx' \rightarrow \lambda = 0$ (ε) $// y = 3x - 2 \rightarrow \lambda = 3$ (ε) $\perp y = 3x - 2 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ (ε) σχηματίζει γωνία ω με xx'
 $\rightarrow \lambda = \tan(\omega)$

609. Δίνεται $f(x) = ax^2$, να βρεις το a ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 2 να είναι 4

$$a = 1$$

610. Δίνεται $f(x) = x^2 + 1$, να βρεις την εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 0

$$y = 1$$

611. Δίνεται $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, να βρεις την εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1

$$y = \frac{1}{4}x + 2$$

612. Δίνεται $f(x) = x^2 + 1$, να βρεις την εφαπτομένη στο σημείο με τεταγμένη 5

$$y = \pm 4x - 3$$

613. Δίνεται $f(x) = x^2 - 5x + 6$, να βρεις την εφαπτομένη που είναι $//$ στον οριζόντιο άξονα

$$y = -\frac{1}{4}$$

614. Δίνεται $f(x) = 2x^2 - ax$, να βρεις το a ώστε η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 2 να σχηματίζει 135° με οριζόντιο άξονα

$$a = 9$$

615. Να βρεις τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$, xx' στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{4}$

$$135^\circ$$

616. Να βρεις τα σημεία όπου οι εφαπτόμενες της $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ $// \text{ } xx'$

$$y = 1, y = -\frac{1}{3}$$



617. Δίνεται $f(x) = (x+1)^2$, να βρεις το λ των εφαπτομένων στα σημεία με τεταγμένη 16

$$\lambda = \pm 8$$

618. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x + 1$, να βρεις την εφαπτομένη που σχηματίζει 135 με οριζόντιο άξονα

$$y = -x + 5$$

619. Να βρεις την εφαπτομένη της $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ που είναι $// y = 3x + 1$

$$y = 3x + 1$$

620. Να βρεις την εφαπτομένη της $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ που είναι $\perp 2x - 4y + 3 = 0$

$$y = -2x + \frac{29}{4}$$

621. Να βρεις τα α, β ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = \frac{1}{2x}$, να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x=1$

$$a = -\frac{5}{2}, b = 2$$

622. Να εξετάσεις αν η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι εφαπτομένη της $f(x) = x^3$



Προβλήματα παραγώγων

623. Δίνεται τετράγωνο πλευράς χ .

- Να βρεις την περίμετρο και το εμβαδό του.
- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου και του εμβαδού όταν η πλευρά είναι 3

4,6

624. Δίνεται κύβος πλευράς χ .

- Να βρεις εμβαδό και όγκο.
- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και του όγκου όταν το $\chi=3$

36,27

625. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τετράγωνη βάση πλευράς χ και ύψος 2χ .

- Να βρεις το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και του όγκου όταν $\chi=3$

60,54

626. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 100 να βρεις εκείνο με το μέγιστο εμβαδό

$x = y = 25$

627. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 64 να βρεις εκείνο με την ελάχιστη περίφραξη

$x = y = 8$

628. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδό 25, ποιο είναι εκείνο που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα

$x = y = \sqrt{50}$

629. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο με εμβαδό 10000 τετραγωνικά μέτρα, να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει την ελάχιστη περίφραξη

$x = y = 100$

630. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο με περίφραξη 240 μέτρα, να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

$x = y = 60$

631. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο όπου η μία του πλευρά εφάπτεται σε τοίχο. Αν για την περίφραξή του χρειάστηκες 300 μέτρα σύρμα, να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

$x = 75, y = 150$

632. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο όπου η μία του πλευρά εφάπτεται σε τοίχο. Αν το εμβαδόν του είναι 400 τ.μ., να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να χρειάζεται το λιγότερο δυνατό σύρμα για την περίφραξή του.

$x = 10\sqrt{2}, y = 20\sqrt{2}$

633. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 100 και μέγιστο γινόμενο.

$x = 50, y = 50$

634. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 100 και το γινόμενό τους ενός με το διπλάσιο του άλλου να γίνεται μέγιστο.

$x = 50, y = 50$





635. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 150 και το γινόμενο του ενός με το τετράγωνο του άλλου να γίνεται μέγιστο .

$$x = 100, y = 50$$

636. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 400 και το άθροισμά τους να γίνεται ελάχιστο

$$x = y = 20$$

637. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 100 και το άθροισμα τους ενός με το 3πλάσιο του άλλου να γίνεται ελάχιστο .

$$x = 10\sqrt{3}, y = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

638. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 100 και το άθροισμα του 2πλάσιου του ενός με το τριπλάσιο του άλλου να γίνεται ελάχιστο .

$$x = \sqrt{150}, y = \frac{2}{3}\sqrt{150}$$

639. Ένα ορθογώνιο φύλλο τετραδίου με εμβαδό 600 , έχει περιθώρια πάνω κάτω 4 ενώ δεξιά και αριστερά 3 .

Να βρεις τις διαστάσεις του φύλλου ώστε η ωφέλιμη επιφάνεια να γίνεται μέγιστη

$$x = 15\sqrt{2}, y = 20\sqrt{2}$$

640. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει περίμετρο 10 και χ μία οξεία του γωνία .

- Ν.δ.ο. η υποτείνουσα $a = \frac{10}{1 + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}$.

- Να βρεις το χ ώστε η υποτείνουσα να γίνεται ελάχιστη

$$\frac{\pi}{4}$$

641. Στο "Troufel" ένα ταψί γαλακτομπούρεκο για να παρασκευαστεί του κοστίζει : $x-20$ ευρώ . Από την πώληση x ταψιών γαλακτομπούρεκων οι εισπράξεις είναι : $500 + 80x - x^2$ ευρώ . Να βρεις πόσα ταψιά γαλακτομπούρεκου θα πρέπει να παρασκευάζει για να έχει το ζαχαροπλαστείο τα μέγιστα κέρδη . Να γίνει ανάλυση των παρακάτω στοιχείων : Τιμή πώλησης ενός ταψιού , συνολικά έσοδα , τιμή κόστους ενός ταψιού , συνολικά έξοδα και κέρδη .

$$x_{\max} = 25, 75, 1875, 5, 125, 175$$

642. Η «Κάβουρας ΕΠΕ» εισάγει είδη επιπλοποιίας . Αν η τιμή πώλησης ενός πάγκου κουζίνας είναι $100-\chi$ ευρώ και το κόστος εισαγωγής χ πάγκων είναι $500 - 20\chi + \chi^2$ ευρώ . Να βρεις πόσους πάγκους θα πρέπει να παραγγείλει τον επόμενο μήνα για να έχει η «Κάβουρας ΕΠΕ» τα μέγιστα κέρδη . Να γίνει ανάλυση των παρακάτω στοιχείων : Πόσα χρήματα θα πρέπει να στείλει η «Κάβουρας ΕΠΕ» στον προμηθευτή πάγκων , ποια θα είναι τα έξοδα , τα έσοδα και τα κέρδη της ΕΠΕ και ποια η τιμή πώλησης ενός πάγκου .

643. Κυλινδρικό δοχείο ανοικτό από πάνω έχει χωρητικότητα 216 . Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του να χρειαστεί για την κατασκευή του ελάχιστο υλικό

$$r = u = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$$



Εφαρμογή «Fermat»

Θεώρημα Fermat

A13. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

644. Αν $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$

- Ν.δ.ο. $x^2 f''(x) = 2f(x)$.
- Να βρεις α, β όταν $f(2) = 2, f'(2) = 3$

$$a = \frac{2}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

645. Αν $f(x) = \eta\mu(ax+b) \Rightarrow f''(x) + a^2 f(x) = 0$

646. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$

647. Αν $f(x) = ax + \frac{b}{x} + 4$, να βρεις τα α, β ώστε να έχει μέγιστο στο $x=-1$ με τιμή 2

$$a = 1, b = 1$$

648. Αν $f(x) = ax^2 - x + 2b$, να βρεις τα α, β αν η συνάρτηση έχει στο $x = -\frac{1}{2}$ τοπικό μέγιστο με τιμή $\frac{5}{4}$

$$a = -1, b = -\frac{1}{2}$$

649. Αν $f(x) = x^2 + ax + b$, να βρεις τα α, β ώστε να έχει ακρότατο στο $x=3$ και να διέρχεται από το $A(0,2)$

$$a = -6, b = 2$$

650. Αν $f(x) = a\eta\mu x + \frac{1}{3}\eta\mu 3x$, να βρεις το α ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατο στο $x=\pi/3$

651. Να βρεις πολυώνυμο 3ου βαθμού με $P''(0) = 2, P(1) = 4, P'(1) = 5, P(0) = 2$

$$P(x) = x^3 + x^2 + 2$$

652. Να βρεις πολυώνυμο 3ου βαθμού με $P''(3) = 0, P(3) = 21, P'(1) = 0, P(1) = 3$

653. Να βρεις τα α, β για να έχει ακρότατο στο $A(2, -1)$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$

$$a = -4, b = 3$$

FERMAT

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 τότε

$$f'(x_0) = 0$$



654. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3ax + 2b}$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$.

655. Να βρείς το α ώστε $f(x) = x^2 + ax$, να έχει ακρότατο στο $x=2$.

656. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, να έχει τ.μ. στο $x=3$ με τιμή 6.

657. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, να έχει τ.ε. στο $x=-1$ με τιμή 13.

$a=1, b=1$

658. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$.

$a=1, b=0$

659. Να βρείς τα α, β, γ ώστε $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$.

$a = \frac{3}{2}, b = 2, c = 1$

660. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = \frac{x^2 + a}{bx}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = 3$.

661. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$.

$a=12, b=4$

662. Να βρείς το α ώστε $f(x) = x^2 + ax$, να έχει ακρότατο στο $x=3$.

$a=-6$

663. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, να έχει τ.μ. στο $x=1$ με τιμή 5.

$a=-2, b=7$

664. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, να έχει τ.ε. στο $x=2$ με τιμή 3.

$a=-2, b=-2$

665. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = 3x^2 + 2ax + 5b$, $f(0) = 20$, $f'(1) = 3$.

$a = -\frac{3}{2}, b = 4$

666. Να βρείς τα α, β, γ ώστε $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 3$.

$a = \frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$

667. Να βρείς τα α, β ώστε $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{bx}$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$.

$a = -4, b = 0 \text{ \& } a = -\frac{28}{13}, b = \frac{4}{13}$

668. Συμπλήρωσε τον πίνακα :

f έχει τ.ε. στο $x=5$		
f έχει τ.μ. στο $x=-3$		
f έχει ακρότατο στο $x=20$		
f έχει τ.ε. στο $x=3$ με τιμή 13		



f έχει τ.μ. στο $x=-2$ με τιμή 23		
f έχει ακρότατο στο $x=-5$ με τιμή 33		

669. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, να έχει τ.μ. στο $x=1$ με τιμή 5

$a = -2, b = 6$

670. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, να έχει τ.ε. στο $x=2$ με τιμή 3.

$a = -2, b = -2$

671. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}$, να μελετήσεις τη συνάρτηση ως προς :

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Να βρεις την εφαπτομένη της συνάρτησης που είναι παράλληλη σε οριζόντιο άξονα
- Να συγκρίνεις $f(2022), f(2024)$

672. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^4 + 4x + 2021$, να μελετήσεις τη συνάρτηση ως προς :

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Να βρεις την εφαπτομένη της συνάρτησης που είναι παράλληλη στη διχοτόμο $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου
- Να συγκρίνεις $f(a^2+1), f(a^2-1)$
- Ν.δ.ο. $x^4 + 4x + 3 \geq 0$

www.kglykos.gr



χαλαρά μόνο
τον Αύγουστο