



Συναρτήσεις επανάληψη

Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
199 ασκήσεις
και τεχνικές
σε 25 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Ασκήσεις επανάληψης

Να βρεις το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

1220. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x|-4}$

1221. $f(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2-4}$

1222. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4} - \sqrt{-x^2+7x-10}$

1223. $f(x) = \sqrt{2\ln x - \ln^2 x}$

1224. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

1225. $f(x) = \frac{3}{2\sin x + 1} + \frac{1}{\cos 2x} - \sqrt{2\eta\mu x - 1}$

1226. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - ax^2 + 3}{x^2 - 2ax + 1} \Rightarrow a = ;$

(-1,1)

Να βρεις τα σημεία τομής των συναρτήσεων με τους άξονες :

1227. $f(x) = 2\ln(1+x) - 4$

1228. $f(x) = 1 - 2\sin x$

1229. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$



1230. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$, $g(x) = 2x - 1$, να βρεις για τις διάφορες τιμές του x τη θέση

των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων

1231. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 2$, να βρεις

- που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
- τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πρώτης βρίσκεται πάνω από της δεύτερης

1232. Να βρεις πότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα,

όπου $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

$(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

1233. Να βρεις τα α , β ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$, $g(x) = x^2 + ax + b$ να τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = -1$ και στον κατακόρυφο άξονα

1234. Ποια η σχετική θέση των συναρτήσεων f, g όπου: $f(x) = g(x) + e^x - 2$

Να εξετάσεις αν είναι ίσες οι συναρτήσεις :

1235. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $g(x) = |x - 3|$

1236. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$, $g(x) = |x| + 2$

1237. Να βρεις τα k, α, m ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις :

$f(x) = \frac{(a+1)x+3}{x+a+2}$, $g(x) = \frac{(a^2-k)x+m-2}{x-a+6}$

$1, 2, 5$

1238. Αν $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 2}$, να ορίσεις τις συναρτήσεις: $f + g$

1239. Αν $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 2}$, να ορίσεις τη συνάρτηση: fg

1240. Αν $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 2}$, να ορίσεις τη συνάρτηση: $\frac{f}{g}$

1241. Αν $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, να ορίσεις τη συνάρτηση: $\frac{x-3}{f}$

1242. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)[(f+g)(x)] - 4(f+g)(x) \leq g(x)[(f-g)(x)] - 8 \Rightarrow f = g$

$f(x) = g(x) = 2$



1243. Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$, να βρεις: $f \circ g$

$$(f \circ g)_{(x)} = \sqrt{\sqrt{x-2}-1}, [3, +\infty)$$

1244. Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$, να βρεις: $g \circ f$

1245. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$, να βρεις το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

- $g(x) = f(x^2)$
- $h(x) = f(\ln x)$

1246. Αν $f(x) = ax + b$: $(f \circ f)(x) + f(1-x) = f(x+2) \Rightarrow a, b =$

1247. Αν $g(x) = \frac{2-x}{2+x}$, $g \circ f(x) = \ln x \Rightarrow f(x) =$

$$f(x) = \frac{2-2\ln x}{\ln x + 1}$$

1248. Αν $g(x) = x+2$, $f(\ln g(x)) = x^2 - 3 \Rightarrow f(x) =$

1249. Ν.δ.ο. δεν υπάρχει συνάρτηση: $f(1-x) + f(x) = x^3 + 2$

1250. Αν $f \circ f(x) = 6x - 5 \Rightarrow f(1) =$

1251. Αν $3f(1-x) + 2f(x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) =$

1252. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y)f(x-y) = x^2 - y^2$

- ν.δ.ο. η συνάρτηση διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- είναι περιττή και
- το $f^2(x) = x^2$.
- Αν η συνάρτηση διέρχεται από το $A(1, -1) \Rightarrow f =$

1253. Να βρεις τη συνάρτηση όπου: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) + x \leq 3x^2 \leq f(x+1) - 5x - 2$

Να βρεις τη μονοτονία των συναρτήσεων :

1254. $f(x) = 2x^5 - 1$

1255. $f(x) = 2 - \ln(x-3)$

1256. $f(x) = 21e^{3-x} + 3$

1257. $f(x) = \sqrt{3-x} + 2$



1258. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

1259. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$,

- να βρεις τη μονοτονία ,
- να λύσεις την εξίσωση $x^5 + x^3 + x = 3$,
- να λύσεις την ανίσωση $x^5 + x^3 + x < 3$



1260. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες , να βρεις τη μονοτονία της : $2f + 3g$

1261. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες , να βρεις τη μονοτονία της : $g \circ f$

1262. Αν συνάρτηση $f : f^3(x) + f(x) = x \Rightarrow f \uparrow$

1263. Ν.δ.ο. δεν υπάρχει συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(1-x)f(1+x) - f(1+x) = 2$

1264. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

- Να βρεις το πεδίο ορισμού
- Να βρεις το σύνολο τιμών της συνάρτησης

1265. Αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις f, g ν.δ.ο. το ίδιο ισχύει για τη σύνθεση της g με την f

1266. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \Rightarrow f : 1-1$, να λύσεις την εξίσωση

$$f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$$

1267. Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln \sqrt{2x-1}$.

- Να μελετήσεις τη συνάρτηση ως προς μονοτονία ,
- σύνολο τιμών και
- να ορίσεις την αντίστροφη συνάρτηση της f .

$$\uparrow, [0, +\infty), f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2}$$

1268. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \uparrow, g \downarrow$.

- Ν.δ.ο. $g \circ f \downarrow$
- να λυθεί η ανίσωση $g \circ f(x^2 - 4x) \geq g \circ f(2x - 8)$

$$[2, 4]$$

1269. Δίνονται συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x}, g(x) = \ln(2 + e^x) - x$

- Ν.δ.ο. είναι 1-1 και
- να υπολογίσεις τις αντιστρέψιμές τους .



- Επιπλέον να λύσεις την εξίσωση $f \circ g(x-2) = f \circ g(x^2)$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{3}{x-1}, g^{-1}(x) = \ln \frac{2}{e^x - 1}, \emptyset$$

1270. Δίνεται η 1-1 συνάρτηση : $g(x^3 + 1) = 2x - 8 \Rightarrow g^{-1}(2) =$

126

1271. Δίνεται η συνάρτηση $f : f^2(x) + f(x) = x^3 - 1$, να βρεις την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

1272. Δίνεται η συνάρτηση $f : f \circ f(x) + f(x) - 3x = 2$, να βρεις την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = \frac{f(x) + x - 2}{3}$$

1273. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 32$,

- ν.δ.ο. υπάρχει η f^{-1}
- να βρεις τα κοινά τους σημεία .

(2, 2)

1274. Δίνεται συνάρτηση $f : f(x) + f^3(x) = 2x + 3$, να βρεις την $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x - 3}{2}$$

1275. Αν $f(x) = ax + b$ και $f^{-1}(4) = 5, f^{-1}(3) = 6 \Rightarrow \alpha\beta =$

-9

1276. Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : 1-1$, να λυθεί η εξίσωση : $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) - x + 1)$

$x = 1$

1277. Αν $f(x) = 2x^2 - 6x, x \in [2021, +\infty)$, να βρεις την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}$$

1278. Να βρεις την μονοτονία της $g : g(x) = f \circ f(x) + 2x + 3, f \downarrow$

- 1279.

↓

1280. **Θέμα Β** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.



B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

B3. Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}$.

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x + 5) < f(3^x + 5)$.

1281. Θέμα B Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

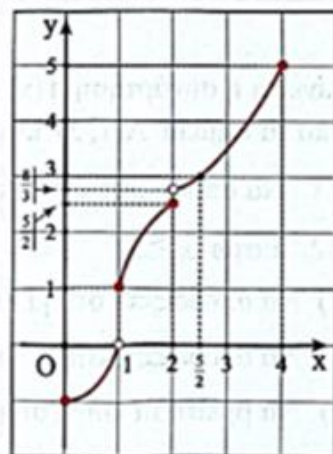
B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

B2. Να αιτιολογήσετε ότι η f αντιστρέφεται.

B3. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(f(2))$ και $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$.

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 1$.

B5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 4) = 5$.



1282. Θέμα B Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

B1. Να γράψετε το σύνολο τιμών της f καθώς και τα διαστήματα μονοτονίας.

B2. Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

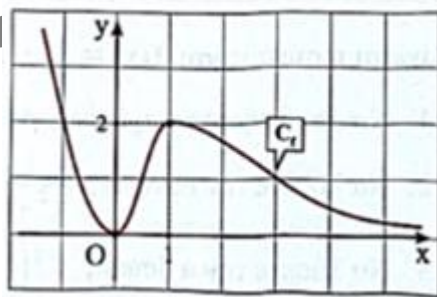
B3. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-e)$ και $f(-\pi)$.

B4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $f(x^2 + 2) < f(2x^2 + 1)$

β) $f(e^{x^2}) \geq f(e)$ γ) $f\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right) < f(e^{-1})$

B5. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2f(x) - 3 = 0$.



1283. Θέμα B Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$, $x > 0$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.

B3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

1284. Θέμα B Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

B1. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .



B4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη C_f και τη $C_{f^{-1}}$.

1285. Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + 6$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-1,11)$.

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

B2. Έστω $x \geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

δ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

1286. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ με $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} = \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) > x + 1$.

1287. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - e^{-x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

Γ3. Να αποδείξετε ότι $e^x(x+1) < 1$ για κάθε $x < 0$.

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) < x$, αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Γ5. Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu x) < f(\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

1288. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή με:

$$f(f(x)) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $f(0) = 0$,

Γ2. η f είναι "1-1",

Γ3. η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως μονότονη και περιττή,

Γ4. $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1289. Θέμα Γ Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $f(x) = e^{a-x} - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

$A(1,0) \in C_f - e^{1-g(x)} + 1 = g^3(x) + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$



Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $f^{-1}\left(\frac{1}{e} - 8\right)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $g(\ln x) = g\left(\frac{e}{x}\right)$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\frac{e}{x} - \frac{e}{e^x} > \ln^3 x - x^3$ για κάθε $x > 0$

1290. **Θέμα Δ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: - η $f \circ g$ είναι "1 - 1" -
 $g(e^x - f(x) + 2x) = g(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g είναι "1 - 1".

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-4x} + x^2 = e^{x-6} + 5x - 6$.

Δ5. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

1291. **Θέμα Δ** Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) + 2f(x) = 3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(3,0)$ ανήκει στη C_f .

Δ3. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

Δ4. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2 - x)$.

1292. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$ καθώς και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g^3(x) = e^{1-g(x)} + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1 - x$.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $(1 - x)^3 - e^{x-1} = f(x^3 + 1)$.

1293. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^3(x) + 3e^{f(x)} = x + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$



Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f\left(\frac{e}{x}\right)$.

Δ3. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $(x^3 - 27)(e^x - 2) < f(0)$.

1294. **Θέμα Δ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $-f(f(x)) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f(g(x)) - e^x - x + 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 - 1".

Δ2. Να αποδείξετε ότι $g(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $xe^{-x} = e^{-x} - 1$.

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(x) \leq x$ αν το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$.

1295. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να βρείτε το πρόσημό της.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Δ4. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$.

1296. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$.

1297. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x) \eta \mu \frac{2x+5}{x-3}$

1298. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} \sigma \nu \nu \frac{3}{x}$

1299. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta \mu^2 x \eta \mu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, υπολόγισε τα όρια :



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 3x}$$

0,0,0

1300. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) - f^2(x)] = 4$, να βρεις το όριο της συνάρτησης στο 1

2

1301. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 2$,

- ν.δ.ο. είναι 1-1,
- να λύσεις την εξίσωση $f(x) = 4$,
- να λύσεις την ανίσωση $x + e^{x-1} - 2 > 0$

 $\uparrow, x=1, x>1$

1302. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 2021$,

- ν.δ.ο. είναι 1-1 και
- να λύσεις την εξίσωση : $e^{x^2-x} + (x^2-x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$

Να βρεις τις αντίστροφες των συναρτήσεων :

1303. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

1304. $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1305. $f(x) = 3x^3 - 2021$

1306. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

1307. $f(x) = x^2 - 2x, x > 2021$

1308. Έστω $f(x) = 1 - \ln x, g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow$

- $g^{-1} =$;
- $g^{-1} \circ f =$;

1309. Γνησίως μονότονη συνάρτηση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2), B(5,9)$

- να βρεις μονοτονία και



- να λύσεις την εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$ και
- την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$

$$\uparrow, x = \pm 2, (-1, 9)$$

1310. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x^2 - 5x + 9$, $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$,

- ν.δ.ο. η f διέρχεται από το $A(3, 3)$
- g δεν αντιστρέφεται

1311. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$

1312. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{8x} - 3x}{x - 2}$

1313. Να βρεις το όριο των συναρτήσεων στο -1 και στο 2 των συναρτήσεων

- $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \leq 2 \\ x^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1, & x < -1 \\ 4x - 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$

1314. Να βρεις τα α, β όταν η συνάρτηση διέρχεται από το $A(2, 6)$ και έχει όριο στο $x = 4$ όταν

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 4 \\ \frac{64\sqrt{x} - 128}{x^2 - 16}, & x > 4 \end{cases}$$

1315. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 3x| + x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

1316. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{|x| - 2}$

1317. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 3|}$

1318. Να βρεις: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9|x+2| - 3|x-2|}{x+1}$

Να υπολογίσεις τα όρια :



1319. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{3x^2}$

$\frac{2}{3}$

1320. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\epsilon\phi 3x}$

$\frac{2}{3}$

1321. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$

-3

1322. Av $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) + 1}{x^2 + x - 2} =;$

$-\frac{5}{6}$

1323. Av $f : f(x+3) = f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) =;$

2

1324. Av $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2021 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)}{x} =;$

2021a

1325. Av $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + f(-x)\eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x - 2x^2} =;$

-3

1326. Av $|x^2 f(x) - \eta\mu^2 2x| \leq x^4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =;$

4

1327. Av $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4a + 3, xf(x) \geq \eta\mu 3x + 5x \Rightarrow a =;$

$\frac{5}{4}$

1328. Av $f : f^3(x) + f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) =;$

0

Να υπολογίσεις τα όρια :



1329. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{|x - 2|}$

$+\infty$

1330. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{\eta\mu^2 x}$

$+\infty$

1331. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3}{x\eta\mu x}$

$-\infty$

Να υπολογίσεις τα παραμετρικά όρια :

1332. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2x\eta\mu x + m^2}{x^2}$

1333. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - a}{(x - 1)^2}$

1334. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{(x - 2)(\sqrt{x + 7} - 3)}$

1335. Να βρεις τα a, b ώστε : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + 2}{x - 1} + bx = 4$

$a = 1, b = -3$

1336. Να βρεις a, b ώστε : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a|x + 2| + b|x - 4| - 2}{x^2 - 5x + 6} = 10$

1337. Να βρεις το a ώστε : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + ax + 1} = +\infty$

1338. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu 2x}{\sqrt{1 + x} - 1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ;$

1339. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ;$

0

1340. Αν $f(x) \leq \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ;$

$-\infty$

Να βρεις τα όρια





1341. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 5x^2 + x - 1$

$+\infty$

1342. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 2x}{-x^2 + x}$

$-\infty$

1343. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 7}{x^2 + x + 3}$

0

1344. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 4x + 5} + 3x$

$+\infty$

1345. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}{x}$

1

1346. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x} - 3x$

2

1347. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 + 2a - 8)x^3 + (a - 2)x^2 - 3}{x^2 + (a + 4)x - 1}$

1348. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x} + ax, a \in \mathbb{R}$

1349. Να βρεις τα a, b ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b = 3$

$-1, \frac{7}{2}$

1350. Να βρεις τις γωνίες $\theta, \varphi \in (0, \pi) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\eta\mu\theta x^2 + 2x - 1} - x + 2\sigma\upsilon\nu\varphi = 1$

90, 90

1351. Αν $\left| (2 + x^4) f(x) - 3x^4 \right| \leq x^2 + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ;$

3

1352. Να βρεις το πολυώνυμο $P(x) : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$

$3x^2 - 6x + 3$

Να υπολογίσεις τα τριγωνομετρικά όρια :



1353. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

0

1354. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3\eta\mu x}{2x + \eta\mu x}$

2

1355. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - 1 \right)$

0

1356. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{5 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$

$+\infty$

1357. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x}$

0

Να υπολογίσεις τα εκθετικά όρια :

1358. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$

$\frac{3}{2}$

1359. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$

-5

1360. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 2}{e^x + 1}$

e

1361. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2}{e^x + 1}$

2

1362. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-5x}}$

1



1363. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9^x - 3^x} + 2 - 3^x$

$-\frac{1}{2}$

1364. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x - 3^x$

$+\infty$

1365. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x - 3^x$

0

Να υπολογίσεις τα λογαριθμικά όρια :

1366. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 3) \ln x$

1367.

1368. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \ln(x + 2) - \ln(x^2 + 3)$

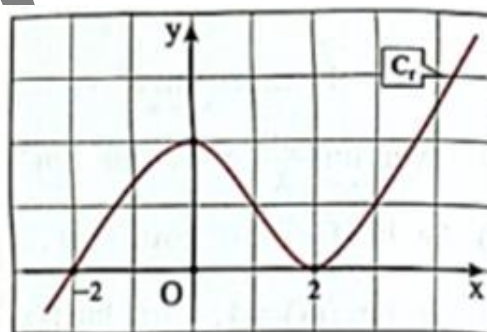
1369. **Θέμα Β** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

B1. α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu 2x \right)$

B2. α) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + 3f(x) + 4} - f(x) \right)$

β) $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^{f(x)} + 1) - f(x) \right)$

B3. α) $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $Z = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)}$



1370. **Θέμα Β** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να υπολογίσετε τα όρια:

B1. α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

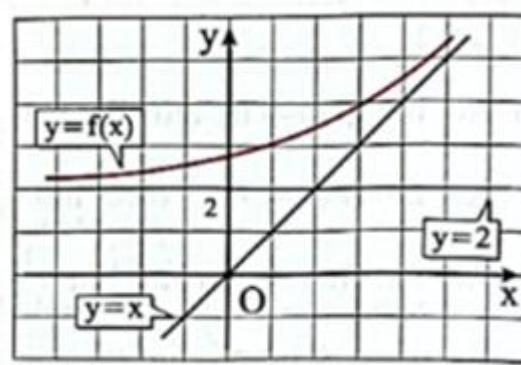
γ) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

δ) $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 2}$

B2. α) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2) \eta\mu x$

β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu 2x \right)$

B3. α) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f^3(x) + f(x) - 2}{f^2(x) + f(x) + 1}$





β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x)+1}-f(x)}{x}$

B4. α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + e^{\frac{1}{f(x)}} \right)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(1 + e^{f(x)}) - f(x) \right)$

B5. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να σχεδιάσετε τη $C_{f^{-1}}$.

1371. **Θέμα Β** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\alpha-1)x^2+1}{x^4+x^2+1}$ και $g(x) = \ln(1 + e^x)$.

B1. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

B2. Για $\alpha = 2$ να υπολογίσετε τα όρια: α) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \eta \mu x)$ β) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

B3. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ β) $E = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - g(x))$

1372. **Θέμα Β** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3\alpha x+\beta-6}{x-2}$ με $x \neq 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -4$.

B2. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x-3}{f^2(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\sin x}$

B3. Αν $g(x) \geq f(x)$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$.

1373. **Θέμα Β** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 3$. Να υπολογίσετε τα όρια:

B1. α) $A = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$

B2. α) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}$ β) $\Delta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

B3. α) $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-xf(2)}{x(x-4)}$ β) $Z = \lim_{x \rightarrow 2} \left[(f(x) - f(2)) \eta \mu \frac{1}{x-2} \right]$

1374. **Θέμα Β** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \alpha x$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

B2. Για $\alpha = -1$ να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta \mu \frac{2}{f(x)} \right)$.

B3. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

B4. Έστω $\alpha = 1$. α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -1 . β) Να υπολογίσετε το όριο $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)+1}$.

1375. **Θέμα Β** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ και $h(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

B1. α) $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 f(x)}{x - \eta \mu^2 x}$

B2. α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) \sin 3x)$ γ) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{x}\right)$

B3. α) $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(h(x))$ γ) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ δ) $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{h(x)} \cdot \eta \mu 2x \right)$

1376. **Θέμα Β** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x} = 3$



B1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

B2. Να υπολογίσετε τα όρια $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(2x)+f(3x)}{x}$ και $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

B3. Να υπολογίσετε τα όρια $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x)}{x-\eta\mu^3 x}$ και $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+\eta\mu x)}{x^2+x}$.

1377. Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}$.

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ .

B4. Αν $\lambda \in (-3, 1)$, να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu \frac{1}{x-1} \right)$.

1378. Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 1)x^3 + 3x^2 + x - 5$.

B1. Για $\alpha = 2$ να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - 5}{x}$.

B2. Για $\alpha = 3$ να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \eta\mu x \right)$.

B3. Για $\alpha = 1$ να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+1}{x^2-1}$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του α .

1379. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \eta\mu x$.

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x + \eta\mu x}$

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + 1}{f(x)}$ β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

Γ4. Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

1380. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f^3(x) + 3x^2 f(x) = 4\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f(x) \neq 0$ για κάθε x κοντά στο $x_0 = 0$ - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$

Γ1. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\ell = 1$.

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 - 2x)}{x^2 - 5x + 6}$

Γ4. Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ δεν μπορεί να είναι ίσο με $+\infty$.

1381. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} + f(x) = \ln x + x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x > 0$.



Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + \sin x) - f(x^2))$ β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4f^2(x) + 3f(x) + 2}{2f^2(x) + f(x) + 1}$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f\left(\frac{\alpha^x + e^{2x}}{e^x}\right) - x \right]$ για τις διάφορες τιμές του θετικού αριθμού α .

1382. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(\ln x) + \frac{\ln x - 1}{\ln x} = 1 - \ln x + \frac{e-x}{e}$

Να μελετήσεις ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

1383.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}, & 0 < x \neq 2 \\ -\frac{3}{2}, & x = 2 \end{cases}$$

1384.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1385. Αν συνεχείς οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2k + 3, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 + 3x + a}{x-1}, & x > 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1, & x = 1 \\ \frac{bx^3 + mx^2 + nx + a}{x^2 - 2x + 1}, & x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a, b, k, m, n =;$$

1386. Αν συνάρτηση συνεχής, $|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^4 \eta \mu^2 \frac{1}{x} \Rightarrow f(0) =;$

1387. Να βρεις τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $xf(x) + 12 = \eta\mu 5x + (x-3)(x-4) \Rightarrow f(x) =;$

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x = 0 \\ \frac{\eta\mu 5x + x^2 - 7x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

1388. Αν συνάρτηση συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $xf(x) + 1 \leq \sin 3x$, να βρεις το $f(0)$

1389. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x = -3$, περιττή,

- Αν $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) + 1 - \eta\mu(x+3)}{x^2 - 9} = 2 \Rightarrow f(-3) =;$
- Ν.δ.ο. συνεχής στο $x=3$



- Να βρεις $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2f(x)+1}{x-3}$

1390. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$

- Να βρεις $f(0)$ και
- αν επιπλέον είναι συνεχής στο $x=0$ ν.δ.ο. είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού

1391. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^3(x) + f(x) + 1 = x$, ν.δ.ο. είναι συνεχής

1392. Ν.δ.ο. η εξίσωση $\frac{\sin x}{4x-\pi} = \frac{\eta \mu x}{4x+\pi}$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο $(-\pi, \pi)$

1393. Αν συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(1) + f(2) + f(3) = 0$, ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα

1394. Δίνεται η συνεχής $f: [a, b] \rightarrow [a, b], a > 0$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστο ένα

$$k \in [a, b]: f^2(k) + kf(k) = 2k^2$$

1395. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση ώστε $2f^2(x) - 3f(x) = 2x^8 + x^4 + 2$, ν.δ.ο. διατηρεί σταθερό πρόσημο

1396. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f^2(x) = 4 - x^2 \Rightarrow$

- $A =$;
- Να λύσεις την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Ν.δ.ο. διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.
- Να βρεις τον τύπο της συνάρτησης αν διέρχεται από το σημείο $A(0, -2)$

1397. Αν συνάρτηση συνεχής και γνησίως μονότονη με $f(0) = 7, f(5) = 1$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } m \in (0, 5): f(m) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{10}$$

1398. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με

- $f''(x) > 0, f'(1) = 0 \Rightarrow f'(0) < 0 < f'(2)$.
- Επιπλέον ν.δ.ο. $f(x) \geq f(1)$

1399. Δίνεται παραγωγίσιμη για την οποία $g'(x) > x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(4) - g(2) > 6$

1400. Δίνεται συνάρτηση στο $\mathbb{R}, f''(x) < 0$, ν.δ.ο. : $f(2) + f(-2) < f(1) + f(-1)$

1401. **Θέμα Β** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f(0) = 1 -$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-6}{x-1} = 3 - f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



B2. Να υπολογίσετε το $f(1)$.

B3. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = x + 4$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (0, 1)$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 36}{x^2 - 1}$.

1402. **Θέμα Β** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x + 1), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

1403. **Θέμα Β** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της g .

B3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

B4. Αν $f(-\pi) < 0$ και $f(\pi) > 0$, να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2^x + 3 - x}{3^{x+1}}$.

1404. **Θέμα Γ** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) = 4 - x^2$ για κάθε $x \in A$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-2, 2)$.

Γ4. Να βρείτε τους πιθανούς τύπους της f και να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Γ5. Αν $f(x) > 0, \quad x \in (-2, 2)$, τότε να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{\eta \mu^2 x}$.

1405. **Θέμα Γ** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(0) - 1)x^3 + x + 1}{(f(\pi) + 1)x^2 + 2}$.

Γ2. Έστω ακόμη ότι ισχύουν: $-f(0) = 2 - (f(x) - \eta \mu x)(f(x) + \eta \mu x) = 2 \sin x f(x), \quad x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(x))$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x + f(x)}$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 1 + \frac{\sin 1 + \sin 2 + \sin 3}{3}$



1406. Θέμα Γ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{f(x)-x}{e^x} + \frac{e^x}{x-f(x)} = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - f(0) = 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να βρείτε.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x^2 - \sin x) = f(x) \ln x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Γ5. Να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \ln \frac{1}{f(x)} \right)$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \ln(1 + e^{f(x)}) \right)$.

1407. Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 3f(x) = x + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = x^3 + 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(2^{x^2+4x}) < 3$.

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \ln x}{x^4}$.

1408. Θέμα Γ Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 0$ και:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x} - x^2)$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\sqrt{x^4 + x} - x^2)] = 1$.

Γ4. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = e$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x}\right) = e^2$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(3) = e^3$,

β) η C_f και η ευθεία $y = x + 2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in (0,2)$.

1409. Θέμα Γ Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:



$$2f^3(x) + f(x) = 3 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε την f^{-1} .

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2 + f(e^x + 5)) < 0$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) - 6}{x^2 - 1}$.

Γ4. Αν επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(f(x)) - f(x^2 + x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 4)$.

1410. **Θέμα Δ** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν: - η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ - $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f(0) = 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Δ3. Έστω ακόμη ότι $\frac{f(x) - x}{e^x} + \frac{e^x}{x - f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

γ) Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-1, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το $A(1, 0)$ περισσότερο απ' ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της κι ένα σημείο που απέχει από το A λιγότερο απ' ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

1411. **Θέμα Δ** Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: - το σημείο $A(0, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , - $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $B(2, -2)$ και $\Gamma(-2, -2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1412. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής: - $f^2(x) + \eta\mu^2 x = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ell = 1$.

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 + x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(4x) - f(-x)\eta\mu 3x}{2x^2 - \eta\mu^2 x}$

Δ3. Αν $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, όπου $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε: α) να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, β) να υπολογίσετε το όριο $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + x + \sigma\upsilon\nu^2 x}}$.

1413. **Θέμα Δ** Έστω f μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Η f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την αντιστροφή της, η οποία είναι η $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.



Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η ευθεία $y = \alpha$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Δ3. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(f(x)-1)^2}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2f^3(x) - 4x) - f(x^2 + 1 + f(2)) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

1414. Θέμα Δ Δίνεται η συνεχής στο $[-1, 1]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: - $f(x) >$

0 για κάθε $x \in [-1, 1]$ - $m < f(1) < M$, όπου m και M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[-1, 1]$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - f(1) \cdot f(x) + f(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\frac{1}{x})x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + f(0)x + 5}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \sqrt{m \cdot M}$.

1415. Θέμα Δ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$

- $2f(0) + f(1) = 2f(3) + f(4)$

Δ1. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ β) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f^2(x)}{x} - 4x \right)$ γ) $\Gamma =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \eta \mu x \right)$ δ) $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x) - 2f(x)]$

Δ2. Να αποδείξετε ότι: α) υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{2f(0) + f(1)}{3}$, β) η f δεν αντιστρέφεται, γ)

υπάρχει $x_1 \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{f(x_1+1) + f(x_1+2)}{2}$.

1416. Θέμα Δ Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(1) = 3$ και $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ Αν η εξίσωση $f(x) + f(0) = 0$ έχει λύση, τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x > 0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$.

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοιοι, ώστε: $f^2(x_1) + f^2(x_2) = 2f(x_1) + 4f(x_2) - 5$

1417. Θέμα Δ Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και $h(x) = \ln x$.

Δ1. Να ορίσετε τη σύνθεση $f = g \circ h$ και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ίση με τη συνάρτηση

$\phi(x) = \frac{4}{x} - x$, $x > 0$.



Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και ότι ισχύει $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$.

Δ3. Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(x^2+1)}{f(x)}$, $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .



Καλός