



Ολοκληρώματα



Κώστας Γλυκός

83 ασκήσεις

Σε 18 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Καλό πήξιμο



Επιλεγμένες
ασκήσεις από
βιβλία



kglykos.gr

Σε όλες τις επόμενες ασκήσεις $F(x)$
είναι η αρχική (παράγουσα) της $f(x)$

3737. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, άρτια με παράγουσα F , να αποδείξεις ότι η $G(x) = -F(-x)$ είναι παράγουσα της f

3738. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, περιττή με παράγουσες F, G , να αποδείξεις ότι η $H(x) = \frac{F(x) + G(-x)}{2}$ είναι παράγουσα της f

3739. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 9$, F αρχική της όπου $F(x) = xf(x) - 2x^3 - x^2$, να βρεις τον τύπο της f και τις αρχικές της συνάρτησης: $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 4$$

3740. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, παραγωγίσιμη με $f(0) = e$, F η αρχική της και $e^x F(x) = f(x)$, να βρεις τον τύπο της συνάρτησης και το σύνολο τιμών της

$$f(x) = e^{e^x + x}$$

3741. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 1$, $F(x)f(2-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, να αποδείξεις ότι:

- Η συνάρτηση είναι σταθερή: $g(x) = F(x)F(2-x)$
- Να βρεις τον τύπο της συνάρτησης f
- Να βρεις τις παράγουσες της $h(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)+1}$

$$f(x) = e^{x-1}$$

3742. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(3) = 5$, $F(-3) = 5$, $f(x)F(-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, να αποδείξεις ότι:

- $F(x)F(-x) = x^2 + 16$
- $f(x) =$;



$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

3743. Έστω F η αρχική της $f(x) = e^{x^2}$, $F(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\eta \mu^2 x} =$

1

3744. Έστω F η αρχική της $f(x) = \sin x^2$, $g(x) = \begin{cases} \frac{F(x^2) - F(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, g συνεχής, να βρεις :

- Τον αριθμό a
- Την εφαπτομένη της g στο σημείο με τετμημένη 0

$$a = -1, y = x - 1$$

3745. Έστω F η αρχική της $f(x) = \ln x$, $G(x) = F\left(x + \frac{1}{2}\right) - F(2 - x)$, $A_F : x > 0$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού της G
- Μονοτονία της G

$$A_G = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

3746. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(0) = 0$, $F(2) = 4$, να αποδείξεις ότι η εξίσωση $f(x)F(x) = 2x^3$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 2)$

3747. Δίνεται παραγωγίσιμη

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \uparrow, g(x) = F(x - a) - F(x - b), g(2016) = g(2017) \Rightarrow g(x) =$$

0

3748. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x + 1) - F(x) \leq x^2 + F(1) - F(0)$, να αποδείξεις ότι $\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = 0$

3749. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - 2F(x)}{(x - 1)^2} = f'(1)$, να βρεις :

- $F(1), f(1)$
- Ν.δ.ο. $\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = 0$
- Ν.δ.ο. η εξίσωση : $f^2(x) + F(x)f'(x) = 2x - 1$, έχει τουλάχιστο μία λύση στο $(0, 1)$

0, 0

3750. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 2016$, $F(2) = 0$ & $2x + y - 2 = 0$ η εφαπτομένη της $F(x)$ στο σημείο με τετμημένη 1, να βρεις :

- $F(1), f(1)$
- Ν.δ.ο. η εξίσωση : $f(x)\eta \mu f(x) + F(x)f'(x)\sin f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $(1, 2)$

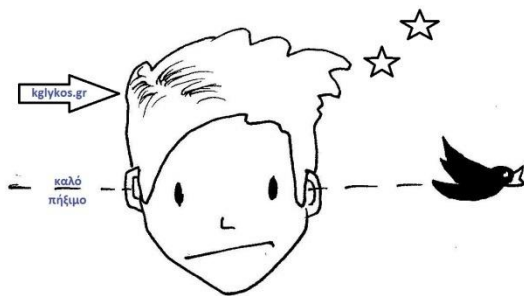
0, -2



3751. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(0) = F(1) = 0$ ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1) : f'(\xi)F(\xi) + f(\xi) = 0$

3752. Δίνεται παραγωγίσιμη $f : [1,4] \rightarrow \mathbb{R}, F(2) < F(1) < F(4) < F(3)$, να αποδείξεις ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (1,4) : f'(\xi) + f(\xi) = 0$

3753. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, να βρεις :



- Μονοτονία

- Ακρότατα

- Ασύμπτωτες

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x))$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(2x) - F(x))$

$y = 1, 1, +\infty$

3754. Δίνεται συνεχής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 1, f^2(x) - 4f(x) + \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 2x^2 + 1} = 0$, να βρεις :

- Τύπο της συνάρτησης

- Μονοτονία

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(2x) - F(x)) \eta \mu x$

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, 0$

3755. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) > 0, f'(x) > 0$, συνεχής συνάρτηση $g : [0,1] \rightarrow (0, +\infty), G(0) = 0$ και συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x), H(0) = 0$, να δείξεις ότι :

- $H(x) > 0, \forall x \in (0,1]$

- $G(x) > 0, \forall x \in (0,1]$

- $H(x)G(1) \leq G(x)H(1), \forall x \in (0,1]$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)(\ln^2(x+1) - \eta \mu^2 x)}{G(x)(1 - e^{-x^2})} =;$

3756. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), f(1) = 2, f(x)F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \Rightarrow f(x) =;$

$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$

3757. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$, να βρεις :

- $f(0)$



- Ν.δ.ο. $F(x+y) - F(x) = xf(y) + F(y) - F(0)$
- Αν $f(1) = 2 \Rightarrow f(x) =$

$$0, f(x) = 2x$$

3758. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(1) = 0, f(x) > F(x)$, ν.δ.ο.

- $f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
- Να λύσεις την εξίσωση : $F(e^{2x} + 1) - F(2x^2 + 2) = 0$

$$+\infty$$

3759. Να βρεις : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 - t + 1) dt}{x^3}$

$$\frac{1}{3}$$

3760. Να βρεις : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$

$$\ln 2$$

3761. Αν συνεχής συνάρτηση $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) > 7, F(2) = 0$, ν.δ.ο. έχει μοναδική ρίζα στο $(2, 3)$ η εξίσωση : $F(x) = 4x - 5$

3762. Να βρεις : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+1) - F(x)}{f(x)}$, αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού

$$1$$

Υπολόγισε τα ολοκληρώματα :

3763. $\int_a^b e^x (f(x) + f'(x)) dx$

3764. $\int_a^b \frac{f'(x) + 4f(x)}{f(x)} dx$

3765. $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx$

3766. $I = \int_a^b \frac{f'(x)}{x} dx + \int_b^a \frac{f(x)}{x^2} dx$

3767. $\int_1^3 \left(\int_4^5 xf(t) dt \right) dx$

$$4 \int_4^5 f(t) dt$$



3768. $\int_0^2 \left(\int_0^1 (4-x-y) dy \right) dx$

5

3769. $\int_1^2 \left(\int_3^x 4dt \right) dx$

-6

3770. Αν συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x)f(y)dy \right) dx - 6 \int_0^1 f(x)dx = -9$, να υπολογίσεις :

- $\int_0^1 f(x)dx$
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^1 f(t) \sin 3x dt \right) dx$

3,1

3771. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_0^2 (xf'(x^2) + 1)dx = 4$, να αποδείξεις ότι :

- Υπάρχει $\xi \in (0, 4): f'(\xi) = 1$
- Υπάρχει $k \in (0, 4): f'(k) = \frac{k}{2}$

3772. Δίνεται συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(1) = 6, \int_1^2 xf'(x)dx = \int_0^2 (3-x)(x^2+2)dx - \int_1^2 f(x)dx, \text{ να βρεις :}$$

- $f(2)$
- Υπάρχει $k \in (1, 2): f(k) = 8$
- Υπάρχουν $m < n \in (1, 2): \frac{2}{f'(m)} + \frac{1}{f'(n)} = 1$

9

3773. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0, \int_0^1 \left(f(x) \left(\int_0^1 f(t)dt \right) + f^2(1) \right) dx = 2 \int_0^1 f(x)f(1)dx, \text{ να αποδείξεις ότι :}$$

- $\int_0^1 f(x)dx = f(1)$
- Αν F παράγουσα της συνάρτησης, ν.δ.ο. υπάρχει $k \in (0, 1): f'(k) = f(k)$

3774. Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 1, F(1) = 0, f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1} f(x)$, να βρεις :

- $f(x)$



$$\bullet \int_0^1 F(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, -\frac{1}{2} \ln 2$$

3775. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x^2, F(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 x F(x^2) dx =$

$$\frac{\sigma \nu 1 - 1}{4}$$

3776. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(2) > f(1), f'(x) = 3x^2 f(x)$, να αποδείξεις ότι :

$$\bullet f(x) > 0$$

$$\text{Αν } f(0) = 1, F(1) = 0$$

$$\bullet f(x) =$$

$$\bullet \int_0^2 x F\left(\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$f(x) = e^{x^3}, \frac{2-2e}{3}$$

3777. Δίνεται $I_v = \int_0^2 \frac{x^v}{x^2 + 1} dx, v \in \mathbb{N}^+$, να αποδείξεις ότι :

$$\bullet I_{v+2} + I_v = \frac{2^{v+1}}{v+1}$$

$$\bullet S = I_1 + I_2 + 2I_3 + I_4 + I_5$$

$$2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{4}$$



3778. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$, να βρεις :

$$\bullet f(0)$$

$$\bullet \text{Ν.δ.ο. } f(x) + f(-x) = 6x^2$$

$$\bullet \text{Αν } \int_{-a}^a f(x) dx = 16 \Rightarrow a =$$

$$0,2$$

3779. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 3$, να βρεις :

$$\bullet \exists f^{-1}$$

$$\bullet \int_0^6 f^{-1}(x) dx$$



0

3780. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^3(x) + 4f(x) = x + 5$, να βρεις :

- $f(-10), f(0)$

-1,1

- Αν υπάρχουν τα όρια, να υπολογίσεις $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

 $+\infty, -\infty$

- Να ορίσεις την f^{-1}

 $x^3 + 4x - 5$

- $\int_{-5}^0 f(x) dx$

11
4

3781. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$
- Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$m(\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq M(\beta - a)$$

- Με τη βοήθεια της ανισότητας $\epsilon \phi x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ και}$$

$$\beta) \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \text{ και}$$

$$\text{Ν.δ.ο. } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Θέτω $h(x) = f(x) - g(x)$ και έχω 2 επιλογές :

- Βρίσκω το πρόσημο της h οπότε αν $h(x) \geq 0$ και το $\int_a^b h(x) dx \geq 0 \dots$
- Μελετώ την h ως προς ακρότατα για να πετύχω το παραπάνω

$$\text{Ν.δ.ο. } \gamma \leq \int_a^b f(x) dx \leq \delta$$

- Ξεκινώντας από το δεδομένο $\alpha \leq x \leq \beta$ εξετάζω αν κατασκευαστικά μπορώ να δημιουργήσω σχέση : $\dots \leq f(x) \leq \dots$ και μετά ολοκληρώνω.
- Ψάχνω τα ακρότατα της f οπότε δημιουργώ τη σχέση $m \leq f(x) \leq M$ και μετά ολοκληρώνω.



$$\beta) \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x} dx \leq 1.$$

3782. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ν.δ.ο. $\int_1^3 f^2(x) dx \geq \int_1^3 6f(x) dx - 18$

3783. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, να υπολογίσεις

$$\bullet \int_1^4 x^2 dx$$

$$\bullet \text{ Ν.δ.ο. : } \int_1^4 (f^2(x) - 2xf(x)) dx \geq -21$$

21

$$\text{Ν.δ.ο. } \int_a^b f^2(x) dx \leq \varepsilon$$

Αφού f συνεχής θα πρέπει $m \leq f(x) \leq M$ οπότε $f(x) - m \geq 0$, $f(x) - M \leq 0$. Με γινόμενο των δύο σχέσεων δημιουργώ μία νέα 2^{ου} βαθμού την οποία και ολοκληρώνω.

3784. Δίνεται συνάρτηση συνεχής $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $\int_1^2 f(x) \left(\int_1^2 f(t) dt \right) dx = \int_1^2 f(x) dx + 2$, να

υπολογίσεις : $\int_1^2 f(x) dx$

2

3785. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{a+2} \frac{f(x)}{1+f^2(x)} dx \leq 1$

3786. Δίνεται συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_1^3 f^2(x) dx + \int_1^3 (f'(x))^2 dx = 21$, να

αποδείξεις ότι $f^2(1) - f^2(3) \leq 21$

3787. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_1^{21} f(x) dx \geq \int_7^{13} f(x) dx$

3788. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_0^2 f(x) dx = 5$, να αποδείξετε ότι :

$$\bullet f^2(x) + 16 \geq 8f(x)$$

$$\bullet \int_0^2 f^2(x) dx \geq 8$$

3789. Να αποδείξεις ότι $\int_{-1}^2 e^{x^2} dx \geq 6$

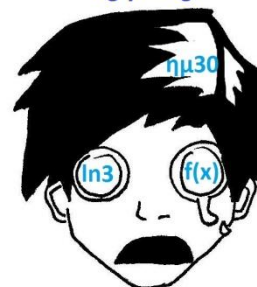
3790. Να αποδείξεις ότι $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx < \frac{1}{3}$



3791. Να αποδείξεις ότι :

- $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$
- $\int_1^2 x^x dx \geq e - 1$
- $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1, \forall x > 1$
- $1 < \int_2^{e+1} \frac{1}{\ln x} dx < e$

kglykos.gr



σίγουρο πήξιμο

3792. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 6 \Rightarrow \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 6} dx \leq \frac{2}{5}$

3793. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [2, 4] \rightarrow [4, 6] \Rightarrow 2 \leq \int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx \leq 6$

3794. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, \int_1^e f^2(x) dx = 4 \int_1^e x(f(x) - x) dx$, να βρεις :

- $f(x)$
- $\int_1^e \frac{1}{f(x)} dx$

$$f(x) = 2x, \frac{1}{2}$$

3795. Δίνονται συνεχείς $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 xf^2(x^2)dx + \int_0^1 xg^2(x^2)dx \Rightarrow f = g$

3796. Δίνεται συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 1, f(3) = 10$ και

$$\int_0^3 f(x)(f''(x) - 4)dx = 10f'(3) - f'(0) - 84 \Rightarrow f(x) = ;$$

3797. **Θέμα Β** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

B2. Να βρείτε το πρόσημο της f όταν $x \in [0, 2\pi]$.

B3. Να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x f(x) dx$.



3798.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - 2x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και να βρείτε την παράγωγό της.

B2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f , το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της C_f .

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 - 1" και να ορίσετε την f^{-1} .

B5. Στο μεταβλητό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της C_f , με $\alpha < 1$, φέρνουμε την εφαπτομένη (ϵ) που τέμνει τις ευθείες $x = 1, y = 0$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$ και ότι το τρίγωνο $P\Delta E$ έχει σταθερό εμβαδόν, όπου $P(1,0)$.

B6. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζουν η γραφική παράσταση της f , οι άξονες $x'x$ και $y'y$ και η ευθεία $x = \lambda, 0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{\lambda \rightarrow 1} E(\lambda)$.

3799.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + \alpha x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$. Η f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

B2. Να βρείτε τις $f'(x), f''(x)$ και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Έχει η f σημεία καμπής; Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τα ακρότατα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$.

B5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

3800.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x > x \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.



B3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$

3801.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$, $x > 0$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι:

$$\ln 2024^{2024} - \ln 2023^{2023} > 1$$

B2. Να αποδείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.

B3. Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = x - 1$ (ή την εξίσωση $x = e^{1-\frac{1}{x}}$).

B4. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

B5. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$ έτσι, ώστε $x^x \geq \alpha^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.

B6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

3802.

Θέμα Β Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $g(x) = x^2 + 2x$, καθώς και η συνάρτηση $h = f \circ g$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση h , καθώς και τις $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$.

B2. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[1, +\infty)$.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(-1, 0)$ δεν άγεται καμία εφαπτομένη προς τη C_h .

B5. Να βρείτε το σημείο N της C_f που απέχει από το $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ την ελάχιστη απόσταση και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο N είναι κάθετη στη BN .

B6. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο της ευθείας (η): $y = -\frac{5}{4}$ άγονται δύο ακριβώς εφαπτομένες προς τη C_g , οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους.

B7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $x = 4$.

B8. Να εξετάσετε αν η h παραγωγίζεται στα σημεία $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$.



B9. Να λύσετε την εξίσωση $(g \circ g \circ g)(x) = -1$.

3803.

Θέμα Γ Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Γ2. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(3^x + 4^x) \leq f(5^x)$.

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 3) + x(x - 1) = f(x + 3)$.

Γ5. Να αποδείξετε ότι $f\left(\int_0^1 e^{x^2} dx\right) \leq 1$.

3804.

Θέμα Γ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln \frac{1}{x}$.

Γ1. Να βρείτε το κοινό σημείο των C_f και C_g και να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις C_f και C_g και την ευθεία $y = \ln 2$.

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - f(x))^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x \cdot f(x))$

Γ4. Να υπολογίσετε: $I = \int_0^\pi (\sigma \nu x \cdot f(1 + \eta \mu x)) dx$, $J = \int_0^\pi (\eta \mu x \cdot f(1 + \eta \mu x)) dx$

3805.

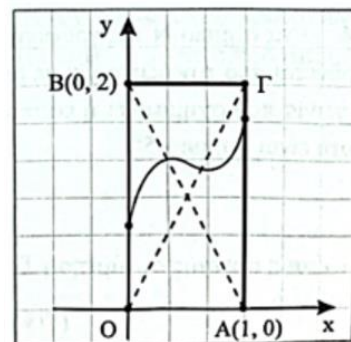
Θέμα Γ Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης:

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο ορθογώνιο του διπλανού σχήματος και δε διέρχεται από τις κορυφές O και Γ . Να αποδείξετε ότι:

Γ1. η C_f τέμνει τη διαγώνιο OG σε εσωτερικό της σημείο,

Γ2. η C_f τέμνει τη διαγώνιο AB ,

Γ3. $\int_0^1 f(x) dx < 2$ και $\int_0^1 f^2(x) dx < 2 \int_0^1 f(x) dx$.



3806.

Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.



Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $2(e^x - 1 - x) < x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

Γ6. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f

Γ7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I = \int_1^2 \frac{e^x - 1 - x}{f(x)} dx$ και $J = \int_1^2 \frac{x^2}{f(x)} dx$

3807.

Θέμα Γ Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με την ιδιότητα:

$$4f(x) = (f'(x))^2 + x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας $(\epsilon): y = -\frac{1}{2}$ άγονται δύο κάθετες μεταξύ τους εφαπτομένες προς τη C_f .

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx$

Γ4. Ένα σημείο N της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με θετική τετμημένη απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 m/s. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο N με τον άξονα $x'x$ τη στιγμή που αυτή είναι ίση με 45° .

3808.

Θέμα Γ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0$ και:

$$(f(x) - x)(f(x) + x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει η f ολικά ακρότατα και ποια είναι αυτά;

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Γ3. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $O(0,0)$ δεν άγεται καμία εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f(x+1) - f(2x-1))$.



Γ5. Να λύσετε την εξίσωση $e^x + \sqrt{x^2 + 1} = x + 2$.

Γ6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$.

Γ7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{4}{3})$.

Γ8. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε:

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1} + \sqrt{\gamma^2 + 1} = 3$$

Γ9. Αν F είναι μια αρχική της f , να λύσετε την εξίσωση $F(x) - F(2x) = F(4x) - F(3x)$.

3809.

Θέμα Γ Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$, και έστω F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$f(x)F(2-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(2-x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x-1}$.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην (ϵ), στη C_f και στον άξονα $y'y$.

Γ4. Το σημείο $M(x, f(x))$, με $x > 0$, απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό $2 \text{ cm} / \text{min}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη (η) της C_f στο M τη χρονική στιγμή που το M απέχει από το $A(2,0)$ την ελάχιστη απόσταση.

Γ5. Αν $h(x) = f(x^2)$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 h(x) dx > \frac{1}{3}$.

3810.

Θέμα Δ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη της f , αν υπάρχει.

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(t) dt > \int_2^3 f(t) dt$.

3811.

Θέμα Δ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και περιττή συνάρτηση με τις ιδιότητες:



$$1 + 2F(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

όπου F είναι μια αρχική της f με $F(1) = 0$.

Δ1. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και τέλος να βρείτε τα σημεία καμπής και το σύνολο τιμών της f .

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$.

3812.

Θέμα Δ Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 0$, έχει την ιδιότητα:

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$, $\alpha > 0$.

Δ3. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη C_g και την ευθεία $x = e$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται με τη C_h , όπου $h(x) = x^2 - x$, και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

3813.

Θέμα Δ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x + \sin x$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \eta \mu x + \sigma \nu x - 1}{f(x)} dx$.

Δ5. Αν $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο καμπής της C_f , να αποδείξετε ότι $y_0 - x_0 = 2\sigma \nu x_0$.



3814.

Θέμα Δ Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = (0,1) \cup (1, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ και την ιδιότητα:

$$\left| \frac{f(x)\ln x}{x-1} - \frac{f(y)\ln y}{y-1} \right| \leq (x-y)^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in A$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = \frac{f(x)\ln x}{x-1}$, είναι $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, $x \in A$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 - 1”, αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Δ5. Να αποδείξετε ότι αν F είναι μια αρχική της f στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$, τότε:

$$F(3) - F(2) < F(4) - F(3)$$

Δ6. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.

Δ7. Να υπολογίσετε το όριο $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x))$, όπου F είναι μια αρχική της f στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$.

3815.

Θέμα Δ Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, και την ιδιότητα:

$$f'(x)(x^2+1) + xf(x) = 1 + 2x(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot f(x) - x\sqrt{x^2+1} - x^2 - 1$ είναι σταθερή και $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της, καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sqrt{x^2+1} = 2023 - x$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Δ4. Αν F είναι αρχική της f , να λύσετε την εξίσωση: $F(2^x) + F(3^x) = F(4^x) + F(5^x)$

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ6. Να λύσετε την εξίσωση: $(1 + e^{2-x}\sqrt{e^{2x-4}+1})(\sqrt{e^{-2x}+1} - e^{-x}) = e^{2-x}$



3816. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt[3]{x} - 2$.

Δ1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f .

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x$.

Δ4. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x} = y + 2 \\ y + \sqrt[3]{y} = z + 2 \\ z + \sqrt[3]{z} = x + 2 \end{cases}$$

3817. **Θέμα Δ** Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f'(0) = 0$ και $f(1) = \frac{1}{e}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\beta f(\alpha) < \alpha f(\beta)$ για τυχαίους ομόσημους αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$.

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{f'(x) + f(x)}{f(x) + e^{-x}} dx$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Δ6. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$, $x > 0$.

3818. **Θέμα Δ** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ μια αρχική της f με $F(0) = 1$ και $2xF(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ4. Αν G είναι μια αρχική της F με $G(1) = 0$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_G και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.



Καλγkοs.gr