



Ολοκληρώματα



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση

217 ασκήσεις και τεχνικές

σε 36 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Τα πάντα για τα
ολοκληρώματα

3521. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x - \gamma) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right) dx = \gamma \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad \gamma \neq 0$
- $\int_{\frac{\alpha}{\gamma}}^{\frac{\beta}{\gamma}} f(x\gamma) dx = \frac{1}{\gamma} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad \gamma \neq 0$
- $(\beta - \alpha) \int_0^1 f(\alpha + (\beta - \alpha)x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

3522. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- $\int_0^{\alpha} f(x) g(\alpha - x) dx = \int_0^{\alpha} f(\alpha - x) g(x) dx$
- $\int_0^2 x^{\kappa} (2 - x)^{\nu} dx = \int_0^2 x^{\nu} (2 - x)^{\kappa} dx, \quad \kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$

3523. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $\int_{-1}^1 f(-x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_{-1}^1 f(x) dx$

3524. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:



$$f(x) + f(1-x) = 4046 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_0^1 f(x)dx$

3525. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f(-x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

3526. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy \quad \text{να αποδείξετε ότι:}$$

- $f(x) + f(-x) = -3x^2$

- $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$

3527. Αν είναι $\int_1^2 f(x)dx = 5$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_1^2 x(f(x) + f(3-x))dx$

3528. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^3 \frac{1}{1+3^{2x-3}} dx$

3529. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^2 \frac{1}{1+e^{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}} dx$

- $B = \int_0^2 \ln \frac{e^x+e^2}{e^x+1} dx$

3530. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+e^x} dx$

- $B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\eta\mu x}}{2^{\eta\mu x} + 2^{\sin x}} dx$

- $\Gamma = \int_0^{2\alpha} \frac{f(x)}{f(x)+f(2\alpha-x)} dx$

- $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha\eta\mu x + \beta\sin x}{\eta\mu x + \sin x} dx$



3531. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

- να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)} dx = \frac{\beta-\alpha}{2}$
- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, \alpha]$ και για κάθε $x \in [0, \alpha]$ ισχύει:

$$f(x) = f(\alpha - x), \quad g(x) + g(\alpha - x) = \beta \quad \text{να αποδείξετε ότι: } \int_0^{\alpha} f(x)g(x)dx = \frac{\beta}{2} \int_0^{\alpha} f(x)dx$$

3532. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ και ισχύει:

$$f(x) \neq -1 \quad \text{και} \quad f(x)f(-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in [-\alpha, \alpha]$$

- να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^{2\nu}}{1+f(x)} dx$
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι:

$$f(\alpha + \beta - x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{να αποδείξετε ότι: } \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha+\beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

3533. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει:

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

$$\text{να αποδείξετε ότι: } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2} [f(\alpha) + f(\beta)]$$

3534. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$,

- να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\pi} \frac{x \eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx$

3535. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 1$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^3 f^{-1}(x) dx$

3536. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_2^e f^{-1}(x) dx$

3537. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.



- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^1 f^{-1}(x) dx$

- Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x) = f(x)$

3538. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1$
- Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ) με τη βοήθεια ενός κατάλληλου σχήματος;

3539. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$,

- να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$
- Μπορείτε να αποδείξετε γεωμετρικά την παραπάνω ισότητα στην περίπτωση που $f(x) \geq 0$;

3540. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

- Αν η f είναι περιττή, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $B = \int_{-3}^3 x^3 (e^{x^2} + 1) dx$

3541. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

- Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$
- Να αποδείξετε ότι: $\int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$

3542. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_{-2}^2 x^5 \sqrt{x^2 + 1} dx$
- $B = \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$
- $\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu^3 x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$



$$\Delta = \int_{-\pi}^{\pi} x^3 (1 + \sin 2x)^8 dx$$

3543. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{1+x^2} dx = 2 \int_0^2 x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1+\sin x}{e^{x^2}} dx = 2 \int_0^1 e^{-x^2} (1 + \sin x) dx$$

3544. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx$

3545. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} (f(x) + f(2\alpha - x)) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma \nu x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma \nu x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta \mu x) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma \nu x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(\sigma \nu x) dx$$

3546. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta \mu x) dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx$$

3547. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = e$ και $f'(x) = 2e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 f(x) dx$

3548. Έστω μια συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, 1]$ και $f(1) = f'(1) = 0$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f''(x) dx.$$

$$\text{Αν } f''(x) = \frac{6}{\sqrt{x^3+1}}, \text{ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

3549. Αν $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^{3T} f(x) dx = 3 \int_0^T f(x) dx$



3550. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και: $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

να αποδείξετε ότι:

- η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 3$,
- $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x+2) dx$.

3551. Έστω f άρτια συνάρτηση και συνεχής στο $[-2, 2]$. Αν F είναι μια αρχική της f και:

$$F(-2) = F(2) - 2024 \quad \text{να βρείτε το ολοκλήρωμα } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

3552. Αν είναι: $f'(x) = \sqrt{1 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) + f(1) = 0$ τότε:

- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,
- να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_0^1 f(x) dx$

3553. Κάποιες ιδιαίτερες αντικαταστάσεις

- Με την αντικατάσταση $x = \operatorname{ef} y$, με $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, να υπολογίσετε το $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$
- Να υπολογίσετε το $B = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

3554. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- ώστε: $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx$
- Με την αντικατάσταση $x = \operatorname{ef} y$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

3555. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $xf(x) - f(-x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$



- $B = \int_0^1 f(x) dx$

3556. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^\pi f^{-1}(x) dx$
- Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικά κοινά σημεία τα $O(0,0)$ και $A(\pi, \pi)$.

3557. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

για την οποία ισχύουν: $f^2(x) + x^2 = 4$, για κάθε $x \in [-2, 2]$, $f(0) = 2$ α) Να αποδείξετε ότι:

- η f διατηρεί πρόσημο στο $(-2, 2)$,
- $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f
- να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I με την αντικατάσταση $x = 2\eta \mu y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δίνεται ότι $2\sigma \nu^2 y = 1 + \sigma \nu 2y$.

3558. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να βρείτε την αντίστροφη της f και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

3559. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .



- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e f(x)dx + \int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx = e^2 + e - 1$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x) > x$

3560. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = x - \eta \mu x$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{f(x)}$
- Να αποδείξετε ότι: $\int_0^\pi f^{-1}(x)dx = \frac{4+\pi^2}{2}$
- Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

3561. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$f'(x) = f'(\alpha + \beta - x)$ να αποδείξετε ότι:

- $f(\alpha) + f(\beta) = c$
- $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$
- $\frac{1}{(\beta - \alpha)^3} \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x)f(x)dx = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{12}$



Εμβαδόν χωρίου

3562. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $f(x) = x^2 - 8x + 12, xx', y, y', x = 4$

3563. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $f(x) = 1 - \ln x, xx', x = e, x = e^2$

3564. Ομοίως για $f(x) = x^3 - x, xx', x = -2, x = 2$

3565. Ομοίως $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 1 \\ 3 \ln x + 2, & x > 1 \end{cases}, xx', x = -1, x = e$

3566. Ομοίως $f(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x, xx'$

3567. Ομοίως $f(x) = x^2 - ax, xx', E = \frac{4}{3} \Rightarrow a = ;$

± 2

3568. Ομοίως $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

, $g(x) = 2x^2 - 4x + 3, x = -1, x = 2$

3569. Ομοίως $f(x) = (x^2 - 4)e^x, g(x) = (x - 4)e^x$

3570. Ομοίως

$f(x) = x^2 - 4x, g(x) = -x^2 - 2x - 4, x = 1, x = 2$

3571. Ομοίως $f(x) = x^2 - 2x, yy'$,

εφαπτομένη της στην κορυφή της

3572. Ομοίως $f, g, x = 1: f''(x) = g''(x) + e^x$

, $f'(0) = g'(0) + 1, f(0) = g(0)$

3573. Ομοίως $f(x) = 3x + \frac{1}{x^2}, g(x) = x, x = 1, x = a > 0$

, να βρεις $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$

$+\infty$

3574. Ομοίως $f(x) = 2x + \frac{4}{x}, xx', x = a, x = a + 1, a > 0$. Να βρεις το a ώστε το εμβαδό να γίνεται

ελάχιστο

$\alpha = 1$

3575. Ομοίως $f(x) = -\ln x, yy', y = 1, y = -1$

Εμβαδό επίπεδου χωρίου

Να θυμάσαι ότι με γραφική παράσταση μπορείς να αντιμετωπίσεις οποιαδήποτε άσκηση. Παρόλα αυτά μπορώ να διακρίνω 3 περιπτώσεις:

Χωρίο μεταξύ f και xx' :

- Κάνω γραφική παράσταση ή
- Λύνω την $f(x) = 0$ και κάνω πινακάκι. Το

$$E = \pm \int_a^b f(x) dx, \text{ όπου τα } a, b \text{ είναι τα}$$

‘κυκλάκια’ στο πινακάκι και το πρόσημο που υπάρχει ανάμεσα στα κυκλάκια.

Χωρίο μεταξύ f και g

- Κάνω γραφική παράσταση ή
- Θέτω $h(x) = f(x) - g(x)$, λύνω την $h(x) = 0$ και κάνω πινακάκι. Όπως και πριν το

$$E = \pm \int_a^b h(x) dx$$

Χωρίο μεταξύ f, g, xx' ή f, g, h

- Κάνω γραφική παράσταση.

Προσοχή: στη γραφική παράσταση θα πρέπει να εντοπίζω το χωρίο και να εξετάζω αν χρειάζεται ‘κόψιμο’. Το κριτήριο είναι: πηγαίνω σε κάθε κορυφή του χωρίου και αν η κατακόρυφη ευθεία κόβει το σχήμα τότε τη φέρνω και δημιουργώ περισσότερα χωρία. Αφού τελειώσω με το ‘κόψιμο’ αθροίζω τα επιμέρους χωρία αθροίζοντας τα αντίστοιχα ολοκληρώματά τους. Το ολοκλήρωμα έχει τη μορφή:

$$\int_{\text{αριστερά}}^{\text{δεξιά}} \text{πάνω} - \text{κάτω}_{\text{γραφική παράσταση}} dx$$

Χωρίο μεταξύ f και εφαπτομένης: Το νου σου, πέρα από τις στάνταρ διαδικασίες μπορεί να σου φανεί χρήσιμη η κυρτότητα.



3576. Ομοίως $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ xe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ και οριζόντια ασύμπτωτη

3577. Ομοίως $f(x) = x^2 - 2x - 3, g(x) = -x^2 + 4x + 5, xx'$

3578. Ομοίως $f(x) = 2 \ln x + 3, xx',$ εφαπτομένη στο $A(1,3)$

3579. Ομοίως $f(x) = x - \frac{1}{x}, x = e, x = e^2,$ ασύμπτωτη στο $+\infty$

3580. Ομοίως $y^2 = 9x, x = 1$

3581. Ομοίως $f(x) = x^2 - 1, A(0, -2)$ και εφαπτομένες που διέρχονται από το A

3582. Ομοίως $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}, x = 1, x = a, a > 0,$ οριζόντια ασύμπτωτη

3583. Ομοίως $f(x) = e^{ax}, a > 0, yy',$ εφαπτομένη που

διέρχεται από $(0,0)$. Να υπολογίσεις $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a), \lim_{a \rightarrow 0^+} E(a) =;$

3584. i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2},$ τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1, x = \lambda, \lambda > 0.$

ii) Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε $E(\lambda) = \frac{1}{2}.$

iii) Να βρεθούν τα $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda).$

$$\lambda = 2, \frac{2}{3} \text{ και } 1, +\infty$$

3585. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0, 2]$. Αν παρουσιάζει ακρότατο στο $x=1$ με τιμή 0, $f(0) + f(2) + 3 = 0.$ Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από γραφική παράσταση της $f', xx', yy', x = 2$

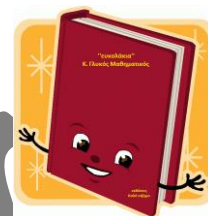
3

3586. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $f(x) = \ln x - 2x, xx', x = 1, x = e$

3587. Ομοίως $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}, y = e$

3588. Ομοίως $y = x^2, y = -x + 2, y = 0$

3589. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x.$



Εμβαδό χωρίου που δεν κλείνει :
Κάνω τη γραφική παράσταση και αφού εντοπίσω το χωρίο προς τη μεριά που δεν κλείνει θεωρώ την κατακόρυφη ευθεία $x=\lambda$ για να οριοθετήσω το χωρίο. Έτσι υπολογίζω το $E(\lambda)$ που χαρακτηρίζει το εμβαδό του χωρίου μέχρι την ευθεία $x=\lambda$. Τότε το $E = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)$



- $f(x) = -x^2 + 4$
- $f(x) = x^2 - 16$
- $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- $f(x) = -x^2 + 5x - 6$
- $f(x) = x^3 - 4x$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

3590. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = e^x, x = 0, x = 1$
- $f(x) = \ln x, x = 1, x = e$
- $f(x) = e^{-x}, x = -1, x = 0$
- $f(x) = \ln \frac{1}{x}, x = 1, x = e$
- $f(x) = \sqrt{x}, x = 0, x = 1$
- $f(x) = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2$
- $f(x) = x^3, x = -1, x = 1$
- $f(x) = -x^3, x = -1, x = 1$

3591. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = x^3 - 1, x = -1, x = 2$
- $f(x) = x^3 - x, x = -2, x = 2$

3592. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζεται:

- από τη C_f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 2$,
- από τη C_f και τον άξονα $x'x$,
- από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.



3593. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1, x = 1$.

3594. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha, & \text{αν } x < 0 \\ -2x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = -1, x = 2$ και τον άξονα $x'x$.

3595. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = x^2 + 2x$

3596. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = 3 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζεται:

- από τις C_f και C_g ,
- από τις C_f, C_g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 0$ και $x = 2$

3597. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ και $g(x) = 3x^2 - 2x + 3$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

3598. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = 2x^2 - 2$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ:

- της C_f , του άξονα $x'x$ και του άξονα $y'y$,
- της C_g και του άξονα $x'x$,
- των C_f και C_g .



3599. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g όταν:

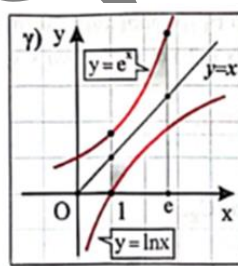
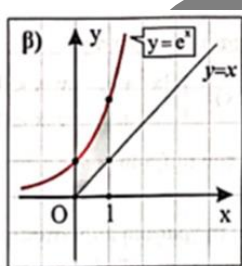
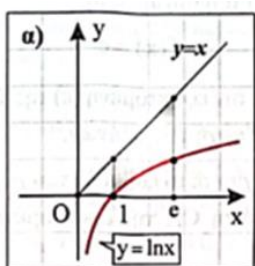
- $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 1$ και $g(x) = 3x^2 - x + 1$
- $f(x) = e^{2x-1} - e^x + 2$ και $g(x) = 1 + e^{x-1}$
- $f(x) = xe^x + 1$ και $g(x) = x + e^x$

3600. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln^2 x$

- Να βρείτε για ποια x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις C_f και C_g .

3601. Να υπολογίσετε

- τα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων στις επόμενες περιπτώσεις:



- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

3602. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x, g(x) = \ln \frac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

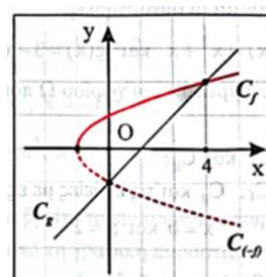
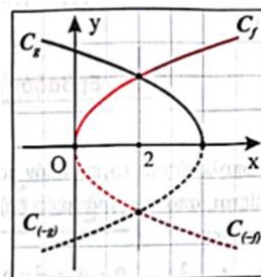
3603. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x > -1$.
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.



3604. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις:

- α) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{4-x}$
- β) $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x-1$



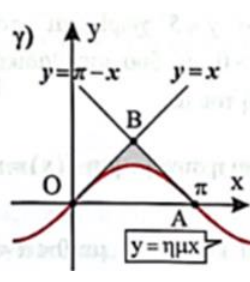
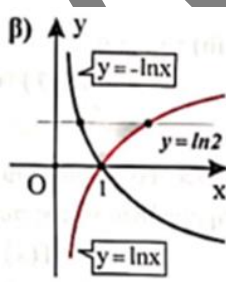
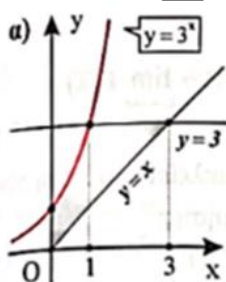
3605. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x$

- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη (ϵ) και τον άξονα $y'y$.

3606. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x$

- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη (ϵ) και τον άξονα $x'x$.

3607. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων στα παρακάτω σχήματα:



3608. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την εφαπτομένη.

3609. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$.

- Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ): $y = 6x - 3$ εφάπτεται στη C_f .



- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ϵ) και τον άξονα $x'x$.

3610. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία (ϵ).

3611. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

- Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα των x .
- Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3612. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1$

- Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο $A(5, f(5))$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και της ευθείας (ϵ).
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία (ϵ) και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3613. Από το σημείο $A(1, -8)$ φέρνουμε τις εφαπτομένες (ϵ_1) και (ϵ_2) προς την παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - 2x - 3$. Να βρείτε:

- τις εξισώσεις των (ϵ_1) και (ϵ_2),
- το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την παραβολή και τις (ϵ_1) και (ϵ_2),
- τον λόγο του εμβαδού του χωρίου Ω και αυτού που περικλείεται από την παραβολή και τον άξονα $x'x$.

3614. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$. Να βρείτε:

- την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ϵ) των C_f και C_g ,
- το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την (ϵ).



3615. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^3$ και την ευθεία με εξίσωση $7x + 3y - 10 = 0$.

3616. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{e}{x}$ και $g(x) = \ln x$

- Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $x = \lambda, \lambda > 0$.
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

3617. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2}$.

- Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = \lambda, 0 < \lambda \neq 1$
- Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $E(\lambda) = 3$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

3618. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 1, x = 3$ και τον άξονα $x'x$.

- Να αποδείξετε ότι $E = \frac{2}{3}$ τ.μ.
- Να προσδιορίσετε την ευθεία $x = \alpha$, που χωρίζει το E σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Να βρείτε:

- το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = \lambda, \lambda > 0$,
- τις τιμές του λ , ώστε $E(\lambda) = \frac{1}{2}$,
- τα όρια: $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$ και $B = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

3619. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + 1$

και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1, \alpha > 0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α .



3620. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και οι ευθείες: $y = 1$ και $y = \alpha^2$ με $0 < \alpha < 1$. Η ευθεία $y = \alpha^2$ χωρίζει το χωρίο που δημιουργείται από τη συνάρτηση f και την ευθεία $y = 1$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3621. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = 5x^4 + 1$ και την ευθεία με εξίσωση $y = 6$ χωρίζεται από την ευθεία με εξίσωση $y = 5\alpha^4 + 1, \alpha > 0$, σε δύο ισοδύναμα χωρία. Να υπολογίσετε το α .

3622. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$.

- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες: $x = 0$ και $x = \lambda$, $-1 < \lambda \neq 0$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$
- $B = \lim_{\lambda \rightarrow -1} E(\lambda)$



Εμβαδό χωρίου που διαχωρίζεται

Το νου σου : ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ασκήσεις όπου διαχωρίζεται ένα χωρίο κατακόρυφα ή οριζόντια .

3623. Ομοίως $f(x) = 4\sqrt{x-1}$, xx' , εφαπτομένη στο $x=5$. Να βρεις την ευθεία $x=\lambda$ που χωρίζει το προηγούμενο χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία
3624. Ομοίως $f(x) = 16 - x^2$, xx' . Να βρεις την ευθεία $y = 16 - a^2$ που χωρίζει το προηγούμενο χωρίο σε δύο ισεμβαδικά
3625. Ομοίως $f(x) = x^2 - 2x$, xx' . Να βρεις την ευθεία $y = ax$ που ορίζει στο προηγούμενο χωρίο άλλα χωρία με λόγο $\frac{E_1}{E_2} = \frac{27}{37}$
3626. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = a^2 + 1$, $a > 0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του a .
3627. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-1)(x-3)$.
- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A, B που η C_f τέμνει τον άξονα των x .
 - Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{2}{1}$.
3628. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα των x .
Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.





Εμβαδό χωρίου μεταξύ συνάρτησης και αντίστροφή της

3629. Έστω συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2, x \geq 2$

- Ν.δ.ο. η συνάρτηση είναι 1-1
- Να βρεις την $f^{-1}(x), A_{f^{-1}}$
- Να βρεις τα κοινά σημεία της συνάρτησης με την αντίστροφή της
- Να βρεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τους

3630. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.
- Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e + 1$.

3631. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x^2}$.

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = e$. (Θεωρούμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.)

3632. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
- Να αποδείξετε ότι: $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $O(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

Χωρίο μεταξύ f και f^{-1}

$E = \int_a^b |f(x) - f^{-1}(x)| dx$ αν μπορώ να βρω την αντίστροφη τότε ακολουθώ την περίπτωση χωρίου f, g . Αν όχι σχηματίζω τη διαφορά $f(x) - x$. Αν βγει θετική τότε $f > x$ δηλαδή $f > f^{-1}$ και υπολογίζεται το

$E = \int_a^b |f(x) - f^{-1}(x)| dx$ Το νου σου : θα χρειαστείς και την τεχνική υπολογισμού ολοκληρώματος αντίστροφης.



- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$. (Θεωρούμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.) (Θέμα εξετάσεων)

3633.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^x}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες εξισώσεις $x = 0$ και $x = e$.

3634.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 + 2x}$

- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Να βρείτε τα A, B , ώστε: $\frac{11x+4}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^4 f(x) dx$
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τον άξονα x' .

3635.

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

- Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και την παραπάνω εφαπτομένη.

3636.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με

$$\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.



- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
- Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδείξετε ότι τα σημεία: $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

3637. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. (Θέμα εξετάσεων)

3638. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (-1, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} F(x), \quad x \in \Delta, \text{ όπου } F \text{ είναι αρχική της } f \text{ με } F(1) = 0.$$

- Να υπολογίσετε το $f(1)$.
- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.
- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$. (Θέμα εξετάσεων)

3639. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις με: $f(0) = g(0)$,

$$f'(0) = 1 + g'(0) \text{ και } (f'(x) - g'(x))(f''(x) - g''(x)) = -e^{-2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) - g'(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$



- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$.

3640. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- Να αποδείξετε ότι αν: $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε και: $\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(0) = 0$ και:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f .
- Να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$
- Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0, x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$. (Θέμα εξετάσεων)

3641. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$

- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και την ευθεία $x = t, t > 0$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(t)}{t + e^t}$
- Να βρείτε την τιμή του $t > 0$, ώστε: $E(t) + 2 = e^2 + e^{-2}$

Η ευθεία $y = 1$ χωρίζει το εμβαδόν $E(t)$ σε δύο χωρία Ω_1, Ω_2 .

- Να βρείτε τα $E(\Omega_1), E(\Omega_2)$.
- Να αποδείξετε ότι το ένα μόνο από αυτά τα εμβαδά τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδόν του Ω καθώς $t \rightarrow +\infty$.

3642. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε: -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0), \quad f'(0) < f(1) - f(0) \quad \text{και} \quad f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

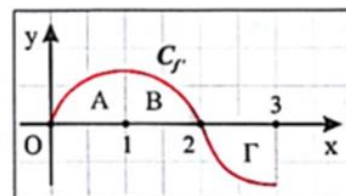
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.



Έστω ότι: $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{xg(x)}$.
- Να αποδείξετε ότι: $\int_0^2 f(x) dx > 2$
- Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$. (Θέμα εξετάσεων)

3643. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f' . Τα χωρία A, B και Γ έχουν εμβαδόν ίσο με τη μονάδα.



- Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(2), f(3)$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- Αν η C_f είναι συμμετρική ως προς το σημείο $M(1,1)$ για κάθε $x \in [0,2]$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες: $x = 0$ και $x = 2$

3644. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
- Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου ανάμεσα στη C_f , τον άξονα $x'x$, τις ευθείες $x = 1, x = \lambda$ με $\lambda > 0$ καθώς και το $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$.

3645. Έστω $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

- Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$.



- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

3646. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,

τότε και
$$\int_a^\beta h(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx$$

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

- Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .
- Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0, x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$

3647.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$

- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.
- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

3648.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
- Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

3649.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.



- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.
- Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$
- Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$

3650. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3/2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.
- Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

3651. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m > 0 \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

3652. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

- Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .
- Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

- Υπολογίστε $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$.

3653. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x-3}$ με $\alpha, k \in \mathbb{R}$ και $x \neq 3$.

- Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$



- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να βρεις το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ $C_f, x x'$

3654. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{kx - x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτομένη της

γραφικής της παράστασης στο σημείο $O(0,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

- Να αποδείξετε ότι $k = 4$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.
- Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2,4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$.
- Να βρεις το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ $C_f, x x'$

3655. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$ με $x \geq 2$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

3656. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

- Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
- Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
- Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.
- Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.



3657. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.
- Να βρεις το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ $C_f, x x', x=1, x=3$

3658. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$
- Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi' \psi$.

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x f(x) dx$

3659. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.
- Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$, $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x h(x) + \ln 2$, $x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

3660. Δίνεται συνάρτηση: $h(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$

- Να βρεις μονοτονία και ακρότατα
- Να βρεις σύνολο τιμών
- Να βρει ασύμπτωτες
- Να βρεις το $\int_0^1 e^x h(x) dx$



3661. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}$, $x > 2$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(2, +\infty)$.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x + 1$, $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$ με $\lambda > 2$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in (2, +\infty)$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$.

3662. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε

επιπλέον ότι $\int_2^3 xf(x) dx = 1$

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.
- Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Έστω (ε): $y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

3663. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2\eta\mu x - x$.

- Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x) \cdot \sin x dx$.
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$.

3664. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και

της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα $x'x$.



- Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0, 1)$.

3665. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$
- Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.
- Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

Ασκήσεις επανάληψης

3666. Ν.δ.ο. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu^2 x} dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \frac{3\pi}{2}$

Να υπολογίσεις τα ολοκληρώματα :

3667. $\int_1^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx$

3668. $\int_0^1 x e^x (x+2) dx$

3669. $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \eta\mu^2 x}{x \eta\mu^2 x} dx$

3670. $\int_1^{16} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

3671. $\int_1^e \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx$

3672. $\int_0^1 \frac{1+e^x}{(x+e^x)^3} dx$

3673. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{x + \eta\mu x} dx$

3674. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\phi x dx$



3675. $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$

3676. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο, με $f(0)=1$, $f(1)=2$, να βρεις :

- $\int_0^1 x^2 (3f(x) + xf'(x)) dx$
- $\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx$

Να υπολογίσεις τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων :

3677. $\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x^2 + x} dx$

3678. $\int_0^2 \frac{3x - 2}{x^2 + x - 12} dx$

3679. $\int_1^4 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 3} dx$

3680. $\int_0^1 \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^2 - x - 2} dx$

3681. $\int_1^2 \frac{x^2 + 18}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$

3682. $\int_1^2 \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x} dx$

3683. $\int_0^{\pi} x \sin 3x dx$

3684. $\int_{-1}^1 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

3685. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \eta \mu 2x dx$

3686. $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

3687. $\int_0^1 (x^2 - x) 2^x dx$

3688. $\int_1^{e^2} |1 - \ln x| dx$

3689. $\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) e^{-2x} dx$

3690. $\int_0^{\pi} e^{-2x} \eta \mu 3x dx$



3691. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$

3692. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x} dx$

3693. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^3 3x \sigma\upsilon\nu^5 3x dx$

3694. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^5 x dx$

3695. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

3696. $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$

3697. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

3698. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \eta\mu x^2 dx$

3699. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

3700. $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx$

3701. $\int_0^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x} dx$

3702. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx$

3703. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2} dx$

3704. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = f'(1) = 2, f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 x^3 f''(x^2) dx =;$

3705. Με θέτω $1-x=t \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2\nu}}{x^{2\nu} + (1-x)^{2\nu}} dx =;$

$\frac{1}{2}$

3706. Αν $f(x^3 + x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx =;$

$\frac{5}{2}$



3707. Αν συνάρτηση συνεχής με $a < b < c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$
3708. Αν συνάρτηση συνεχής $\Rightarrow \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx$
3709. Αν συνάρτηση συνεχής $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$
3710. Να υπολογίσεις την ποσότητα : $A = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$ για την περίπτωση που η συνάρτηση είναι άρτια και για την περίπτωση που είναι περιττή
3711. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=1, f''(x) = -f''(2-x) \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx =$
2
3712. Αν $I_v = \int_0^1 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx, v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξεις ότι :
- $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{v}(e^v - 1)$
 - Να υπολογίσεις το I_3
3713. Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^v x dx \Rightarrow I_v + I_{v-2} = \frac{1}{v-1}$. Να υπολογίσεις το I_5
3714. Αν $f(x) = e^x + 2x - 5$, ν.δ.ο.
- αντιστρέφεται
 - να υπολογίσεις το $\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$
- 2**
3715. Αν συνάρτηση γνησίως μονότονη διέρχεται από $A(1,8), B(10,13)$, να υπολογίσεις την ποσότητα
 $A = \int_1^{10} f(x)dx + \int_8^{13} f^{-1}(x)dx$
122
3716. Χωρίς να υπολογίσεις τα ολοκληρώματα, ν.δ.ο.
- $\int_2^3 x^2 - 4x + 4dx > 0$
 - $\int_{-1}^4 x^2 - x + 3dx > 0$
 - $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \eta\mu^2 x dx + \int_{\pi}^{-\pi} e^x dx < 0$
3717. Αν συνάρτηση συνεχής $\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx + 1 \geq 2 \int_0^1 f(x)dx$



Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ

3718. $f(x) = x^2 - 6x + 8, xx', x = 1, x = 5$

3719. Ομοίως μεταξύ $f(x) = x^3 - x, xx'$

3720. Ομοίως μεταξύ $f(x) = \frac{3x^2, x \leq 0}{e^{-x}, x > 0}, xx', x = -2, x = 1$

3721. Ομοίως μεταξύ $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}, xx', x = 1, x = 4$

3722. Ομοίως μεταξύ $f(x) = x^2 + 5x + 1, g(x) = 4x^2 - x + 1, x = -1, x = 3$

3723. Ομοίως μεταξύ $f(x) = x^3, g(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$

3724. Ομοίως μεταξύ $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 2, xx'$

3725. Ομοίως μεταξύ $f(x) = x^2, g(x) = x + 2, x = -2, x = 3$

3726. Ομοίως μεταξύ $f(x) = |\ln x|, y = 1$

$-e^{-1} + e - 2$

3727. Ομοίως μεταξύ $y^2 = 4x, x^2 = 4y$

$\frac{16}{3}$

3728. Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$, να βρεις το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση, την εφαπτομένη στο $A(5, 2)$ και τους άξονες

3729. Αν $f(x) = \ln x$, να βρεις το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση την εφαπτομένη στο $x=1$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}, x = e$

3730. Να βρεις τις εφαπτόμενες της παραβολής $x^2 = 4y$ που άγονται από το $A(2, -3)$ και το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση και τις εφαπτόμενες.

3731. Να βρει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^{-x} + 2e^x$, στο σημείο που παρουσιάζει ακρότατο, το θετικό ημιάξονα Ογ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

3732. Αν $f(x) = 2x - x^2, y = ax, 0 < a < 2$, να βρεις το a ώστε η ευθεία να χωρίζει σε δύο ισοδύναμα χωρία το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και τον οριζόντιο άξονα.

$2 - \sqrt[3]{4}$



3733. Αν $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$, να βρεις το εμβαδό $E(a)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x=1, x=a, 0 < a \neq 1$. Να υπολογίσεις τα όρια :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} E(a), \lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$$

$$+\infty, +\infty$$

3734. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, να βρεις το εμβαδό $E(a)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x=e, x=a, 0 < a \neq 1$. Να υπολογίσεις το $\lim_{a \rightarrow 0^+} E(a)$

3735. Αν $f(x) = e^x + x - 1$, να βρεις το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα και την ευθεία $x=e$

$$\frac{3}{2}$$

3736. Αν $f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 4$, να βρεις το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1}

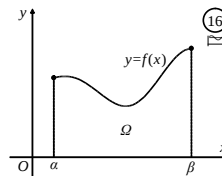
$$\frac{50}{3}$$



A17. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Απάντηση

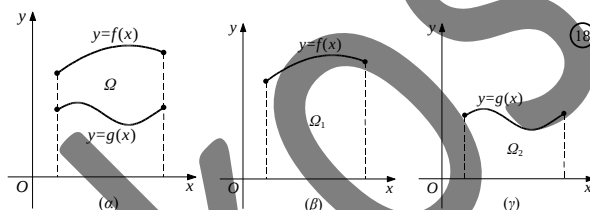
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.



A18. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, όταν $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς.

Απάντηση

Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g , στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.

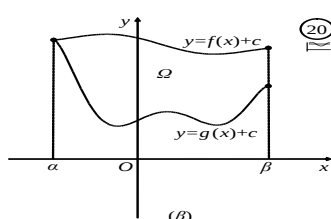
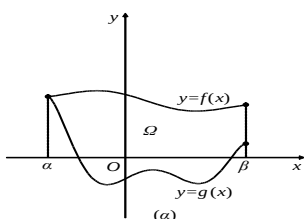
Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.

A19. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f, g είναι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

Απόδειξη

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' .





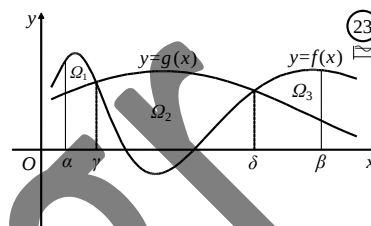
Επομένως, θα έχουμε: $E(\Omega) = E(\Omega') = \int_a^b [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. Άρα $E(\Omega) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

A20. Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με

$$E(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Απόδειξη

Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή,

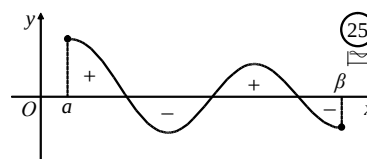


$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_a^{\gamma} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\gamma}^{\delta} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\delta}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^{\gamma} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\gamma}^{\delta} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\delta}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \int_a^{\beta} |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, } E(\Omega) = \int_a^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

Σχόλιο

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_a^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25).



A21. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με: $E(\Omega) = -\int_a^{\beta} g(x) dx$

Απόδειξη

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_a^{\beta} (f(x) - g(x)) dx = \int_a^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_a^{\beta} g(x) dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $E(\Omega) = -\int_a^{\beta} g(x) dx$

