



Ολοκληρώματα



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση

387 ασκήσεις και τεχνικές

σε 55 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



kglykos.gr

Τα πάντα για τα
ολοκληρώματα

Τεχνικές ολοκλήρωσης

Απλές περιπτώσεις θεωρούνται όλες εκείνες όπου αντιμετωπίζονται με ένα απλό θέτω ή μία παραγοντική ολοκλήρωση .

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων : Αν ο βαθμός παρονομαστή $>$ βαθμό αριθμητή $\Rightarrow$ ρίχνω μία ματιά μήπως ο αριθμητής είναι παράγωγος του παρονομαστή οπότε 'θέτοντας' τον παρονομαστή λύνεται εύκολα αλλιώς παραγοντοποιώ τον παρονομαστή όσο περισσότερο μπορώ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (το καλύτερο) και γράφω το κλάσμα σε άθροισμα κλασμάτων . Προσοχή στην παραγοντοποίηση : αν οι όροι είναι της μορφής :

- Πρωτοβάθμιος π.χ. $x+1 \rightarrow \frac{A}{x+1}$,
- αν δευτεροβάθμιος π.χ. $x^2+1 \rightarrow \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$, αν έχω πολ/τα κάποιας ρίζας π.χ. το 1 με πολλαπλότητα 2 τότε

$$\rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \text{ (Τεχνική A,B) .}$$

- Δίνονται μερικά παραδείγματα : $\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ ή

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \dots = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1} \text{ ή}$$

$$\frac{x+3}{x^3-2x^2+x} = \dots = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{(x-1)^2} .$$



Αν βαθμός αριθμητή $\geq$ παρονομαστή τότε : με πολυωνυμική διαίρεση (σπάνια με Horner) απλοποιώ το κλάσμα

Ολοκλήρωση εκθετικών συναρτήσεων : οι εκθετικές έχουν την ιδιαιτερότητα να αντιμετωπίζονται με θέτω $e^x = t$. Προσοχή να έχουν μετατραπεί όλες οι εκθετικές με αρνητικό εκθέτη πριν εφαρμόσεις το θέτω .



Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων : εδώ έχουμε πολλές περιπτώσεις και συχνά χρειάζεται η φαντασία του μαθητή για να αντιμετωπίσει μια τριγωνομετρική συνάρτηση . Θα προσπαθήσω να τις βάλω σε κατηγορίες διακριτές μεταξύ τους .

Δυνάμεις μόνο μίας τριγωνομετρικής :

- $\int \eta \mu x dx = -\sigma \upsilon \nu x + c,$
- $\int \eta \mu^2 x dx = \int \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2x}{2} dx = \dots ,$
- $\int \eta \mu^3 x dx = \int \eta \mu^2 x \eta \mu x dx = \int (1 - \sigma \upsilon \nu^2 x) \eta \mu x dx = (\theta \acute{\epsilon} \tau \omega \sigma \upsilon \nu x = t) = \dots$ οπότε ανάλογα συνεχίζω με άρτιες ή περιττές δυνάμεις του ημιτόνου . Η ίδια φιλοσοφία ισχύει για δυνάμεις συνω .
- $\int \epsilon \varphi x dx = \int \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} dx = (\theta \acute{\epsilon} \tau \omega \sigma \upsilon \nu x = t) = \dots ,$
- $\int \epsilon \varphi^2 x dx = \int \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx = \int \frac{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx = (\sigma \acute{\pi} \alpha \omega \text{ το κλάσμα}) = \dots ,$
- οποιαδήποτε μεγαλύτερη δύναμη αντιμετωπίζεται ως εξής : θα απομονώνω το

$$\epsilon \varphi^2 x = \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} - 1 = (\epsilon \varphi x)' - 1 \text{ και συνεχίζω με παραγοντική ολοκλήρωση . Η ίδια}$$

φιλοσοφία ισχύει για δυνάμεις σφω .

ημω, συνω χωρίς δυνάμεις :

Χρησιμοποιώ τύπους:

- $2\eta \mu A \eta \mu B = \sigma \upsilon \nu(B-A) - \sigma \upsilon \nu(A+B) ,$
- $2\sigma \upsilon \nu A \sigma \upsilon \nu B = \sigma \upsilon \nu(A+B) + \sigma \upsilon \nu(A-B) ,$
- $2\eta \mu A \sigma \upsilon \nu B = \eta \mu(A+B) + \eta \mu(A-B)$

ημω, συνω με δυνάμεις : δεν ομαδοποιούνται αλλά μπορείς να πάρεις μερικές ιδέες :

- $\int \eta \mu^3 x \sigma \upsilon \nu^2 x dx = \int \eta \mu^2 x \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^2 x dx = \int (1 - \sigma \upsilon \nu^2 x) \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^2 x dx = (\theta \acute{\epsilon} \tau \omega \sigma \upsilon \nu x = t) = \dots ,$
- $\int \eta \mu^4 x \sigma \upsilon \nu^2 x dx =$ τύποι από τετραγωνισμό και κουράγιο = ... ,
- $\int \frac{1}{\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x} dx = \int \frac{\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x}{\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x} dx = \sigma \acute{\pi} \alpha \omega \text{ και συνεχίζω} = \dots ,$

Πανεπιστημιακό : αυτό που ξετινάζει πολλά τριγωνομετρικά όρια είναι το $\theta \acute{\epsilon} \tau \omega$

$$\epsilon \varphi \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \eta \mu x = \frac{2t}{1+t^2}, \sigma \upsilon \nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \epsilon \varphi x = \frac{2t}{1-t^2}, \sigma \varphi x = \frac{1-t^2}{2t}$$



- **Ολοκλήρωση λογαριθμικών συναρτήσεων :** κατά κανόνα πρέπει να χρησιμοποιείς τριγωνομετρική ολοκλήρωση ξεκινώντας από την ποσότητα που βρίσκεται δίπλα στο λογάριθμο .
- **Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων :** Συνήθως θέτεις το υπόρριζο

51. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:
 $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

54. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f, g σ υ ν ε χ έ ς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

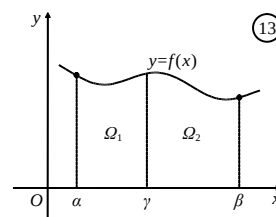
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ και γενικά
- $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

γ) Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^b f(x)dx$

Σημείωση: Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

δ) Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_a^b f(x)dx > 0$.





3135. Να βρείτε μια αρχική των συναρτήσεων:

- $f(x) = 2x - 3$
- $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
- $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$
- $f(x) = 24x^5 + 20x^4 - 12x^3$

3136. Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = e^x + 3x^2$
- $f(x) = 2e^{2x} + 4x^3$
- $f(x) = -e^{-x} + 2x$
- $f(x) = 4e^{-2x} + 6x$

3137. Να βρείτε μια αρχική των συναρτήσεων:

- $f(x) = \sin x - \eta\mu x$
- $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sin x$
- $f(x) = 4\eta\mu 2x + 3\sin 3x$
- $f(x) = 2\sin 2x + 3\eta\mu 3x$
- $f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$
- $f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sin^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

3138. Να βρείτε μια αρχική των συναρτήσεων:

- $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$
- $g(x) = e^x + \eta\mu x + \sin x$
- $h(x) = 2e^{2x} + 3\sin 3x + \frac{1}{x}, \quad x > 0$
- $\varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}, \quad x > 0$

3139. Να βρείτε μια αρχική των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}, \quad x > 0$



- $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}, \quad x > 0$
- $f(x) = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x^2}, \quad x > 0$
- $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^3} + \frac{3}{x^4}, \quad x > 0$

3140. Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}, \quad x > 0$
- $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}, \quad x > 2$
- $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{2-x}, \quad x < 2$
- $f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+5}{x+2}, \quad x > -1$

3141. Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}, \quad x > 3$
- $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{3}{3-x}, \quad x > 4$
- $f(x) = \frac{6}{3x-2} + \frac{3}{3-x}, \quad x > 3$
- $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}, \quad x > 2$
- $f(x) = \frac{4x^3+3x^2+2x}{x^2}, \quad x > 0$
- $f(x) = (4 + \sqrt{x})^2, \quad x > 0$

3142. Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, \quad x > 0$
- $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$
- $f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}, \quad x > 0$
- $f(x) = (3 + \sqrt{x})^2, \quad x > 0$



3143. Να βρείτε την αρχική F της συνάρτησης f , όταν:

- $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 5, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x + 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \quad F(1) = 6$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 e^x + 2x e^x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad F(0) = 1$

3144. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ , να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης g .

- $g(x) = f'(x)f(x)$
- $g(x) = f'(x)f^3(x)$
- $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)+1}$
- $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$
- $g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$
- $g(x) = f'(x)e^{f(x)+2}$
- $g(x) = f'(x)\eta\mu f(x)$
- $g(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)$

3145. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Να βρείτε τις αρχικές της συνάρτησης g στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $g(x) = (f'(x))^2 + f(x)f''(x)$
- $g(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$
- $g(x) = \frac{f''(x)f'(x) - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$
- $g(x) = x(f''(x) + 2f'(x))$

3146. Να βρείτε μια αρχική των συναρτήσεων:

- $g(x) = e^x(f(x) + f'(x))$
- $h(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$



$$\bullet \quad \varphi(x) = e^{2x}(f'(x) + 2f(x))$$

$$\bullet \quad \omega(x) = \frac{f'(x) + 3f(x)}{e^{-3x}}$$

3147. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{-2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{(1+\ln x)^3}{x}, \quad x > 0$$

$$\bullet \quad f(x) = (e^x + \eta\mu x)^4(e^x + \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad f(x) = e^{x^2+\ln x}, \quad x > 0$$

$$\bullet \quad f(x) = 2e^{1+\eta\mu^2 x} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

3148. Να βρείτε μια αρχική συνάρτηση F της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{\epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{\sqrt{\epsilon\phi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet \quad f(x) = e^{x^3+2\ln x}, \quad x > 0$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}, \quad x > 0$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{3\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

3149. Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$



- $f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\epsilon\phi x)}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

3150. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν αυτή παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -14 και ισχύει ότι $f''(x) = 24x^2 + 24x + 2$.

3151. Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν:

- $f'(x) = 5x^4 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 1$
- $f'(x) = e^x + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 3$
- $f'(x) = 2x + \sqrt{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{5}{3}$
- $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f(1) = -\frac{1}{6}$
- $f'(x) = \frac{(2x+1)^2 + \sqrt{x}}{x^2}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 5$

3152. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, αν η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ έχει κλίση $\frac{e^{2x}}{f(x)}$ και το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη C_f .

3153. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3154. Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν: $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και τα σημεία $A(1,2), B(-1,3)$ ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

3155. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 4$ και ισχύει ότι: $f''(x) = \frac{4}{x^3}$ για κάθε $x > 0$

3156. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(0) = 1$ και: $f'(x) = \frac{2x^3 + 2x}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

3157. Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x^2 f'(x) + 2xf(x) = 1 - f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = \frac{1}{2}$



- $f'(x)\eta\mu x = \eta\mu^2 x + f(x)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $\frac{f'(x)}{f(x)+2} = \frac{\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$, $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
- $f'(x) = \frac{2f^2(x)}{x^3}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{e^x+1}f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = 2xe^{x^2-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

3158. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = 7$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{2+f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ Να βρείτε:}$$

- μια αρχική G της συνάρτησης: $g(x) = \frac{2}{x^2}$, $x > 0$
- τη συνάρτηση f .

3159. Η F είναι αρχική της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει ότι:

$$F(2-x) + F(x^2-4) = 6x-2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.
- Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

3160. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας μια αρχική συνάρτηση F έχει την ιδιότητα:

$$F(1-x) + F(x^2-1) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -2$.

3161. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$F(x) = F(-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- Αν $f(x) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
- Να βρείτε τον τύπο της f .



3162. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 2$ και F αρχική της με την ιδιότητα:

$$f(x) = 2xe^{x^2-F(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \eta\mu \frac{2}{x} \right)$

3163. Έστω $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσα της f . Αν $F(0) = 0$ και:

$$f(x) = e^{-F(x)} \quad \text{για κάθε } x > -1 \quad \text{τότε:}$$

- να αποδείξετε ότι: $f'(x) = -f^2(x)$ για κάθε $x > -1$
- να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , γ) να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\eta\mu 3x)f^2(x))$

3164. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της με την ιδιότητα:

$$2\alpha F(x^2) \geq \alpha^2 + F^2(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}^*. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- $F(0) = \alpha$ και $F(1) = \alpha$,
- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

3165. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, έχει αρχική συνάρτηση F και ισχύει:

$$f(x)F(1-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{Να αποδείξετε ότι:}$$

- $F(x)f(1-x) = 1$
- $(F(x)F(1-x))' = 0$
- $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- $F(x)F(1-x) = 1$
- $F(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $F(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$
- $f(x) = e^{x-\frac{1}{2}} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$

3166. Μια εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι το οριακό ημερήσιο κόστος λειτουργίας της είναι:



$(0,015x^2 - 2x + 80) \text{ €}$ όπου x ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγονται ημερησίως. Η εταιρεία έχει πάγια έξοδα 1000 € την ημέρα. Να βρείτε:

- το ημερήσιο κόστος $K(x)$ παραγωγής x μονάδων του προϊόντος,
- την αύξηση του κόστους $K(x)$, αν αντί για 30 μονάδες παραχθούν 60 μονάδες προϊόντος σε μία ημέρα.

3167. Ένας ζωικός πληθυσμός αυξάνεται με ρυθμό $(200 + 50t)$ μονάδες ετησίως (t ο χρόνος σε έτη). Έστω $\Pi(t)$ ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t .

- Να βρείτε πόσο θα αυξηθεί ο πληθυσμός στο διάστημα ανάμεσα στο τέταρτο και στο δέκατο έτος.
- Αν ο πληθυσμός στο τέλος του 3ου έτους είναι ίσος με 850 ζώα, να βρείτε τον πληθυσμό στο τέλος του 8ου έτους.

3168. Σ' ένα εθνικό ζωολογικό πάρκο, ο ρυθμός αύξησης του πλήθους $N(t)$ των ζώων ανά έτος είναι αντιστρόφως ανάλογος του αριθμού των ζώων που ήδη υπάρχουν στο πάρκο, όπου t είναι ο χρόνος σε έτη αρχίζοντας από το 2016. Την 1/1/2016 υπήρχαν στο πάρκο 50 ζώα και την 1/7/2021 υπήρχαν 60 ζώα.

- Να αποδείξετε ότι: $N(t) = \sqrt{200t + 2500}$, $t \geq 0$
- Να βρείτε πόσα ζώα θα υπάρχουν στο πάρκο την 1/1/2028.
- Να βρείτε ποιο έτος θα υπάρχουν στο πάρκο 90 ζώα.

3169. Ο πληθυσμός $\Pi(t)$ ενός νησιού μεταβάλλεται με ρυθμό που είναι ανάλογος του πληθυσμού που ήδη υπάρχει και t είναι ο χρόνος σε έτη. Ο πληθυσμός του νησιού είναι σήμερα 2000 κάτοικοι και εκτιμάται ότι σε 20 έτη θα είναι 1800 κάτοικοι.

- Να αποδείξετε ότι: $\Pi(t) = 2000 \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{t}{20}}$, $t \geq 0$
- Να βρείτε τον πληθυσμό του νησιού μετά από 40 έτη.

3170. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα:

$$f(x)F(x) = -e^{-2x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{Αν } f(0) = 1, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

- υπάρχει σταθερά c , ώστε: $F^2(x) = e^{-2x} + c$
- $F(x) = -e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$,



- $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x)) = 0$,
- η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $y = -ex$.

3171. Αν F είναι αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$f(x)F(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$, τότε:

- να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,
- να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- να αποδείξετε ότι: $\frac{e^\alpha + e^\beta}{2} \geq e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3172. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^{\ln x} (2 \ln x + 1)$, $x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Να αποδείξετε ότι:

- $e^{x-1} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $e^{-(x-1)^2} f(x) \leq 2x - 1$ για κάθε $x > 0$.

3173. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$f(1) = e$ και $f'(1) = 0$ Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $x^3 f''(x) = e^x$, τότε:

- να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x$,
- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,
- να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$
- να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

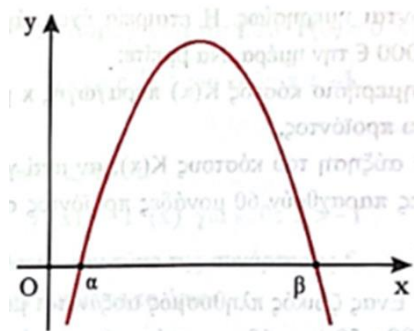


3174. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης:

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Θεωρούμε τις αρχικές F και G της f με:

$F(\alpha) = G(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί ότι:

- $F(\beta) + G(\alpha) = 0$,
- Η εξίσωση: $\alpha F(x) + \beta G(x) + 2x = \alpha + \beta$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (α, β) .





Ορισμένο ολοκλήρωμα

3175. $\int_1^2 \sqrt{x^3} dx$

3176. $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

3177. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^5} dx$

3178. $\int_0^3 \sqrt[5]{x^2} dx$

3179. $\int_1^2 \frac{2}{3x-1} dx$

3180. $\int_1^3 \frac{1}{x+1} dx$

3181. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu(3x+\pi) dx$

3182. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu 2x dx$

3183. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu^2(2x+\frac{\pi}{6})} dx$

3184. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 3x} dx$

3185. $\int_1^3 \frac{1}{e^{3-2x}} dx$

3186. $\int_1^3 e^{-x} dx$

3187. $\int_1^3 \sqrt[4]{(2x+1)^5} dx$

3188. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx$

3189. $\int_2^3 \frac{1}{x^3-3x^2+3x-1} dx$

3190. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x) dx$

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f καλείται η παραγωγίσιμη συνάρτηση F όπου $F'(x)=f(x)$. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F(x)+c$ είναι αρχικές της f . Αν F , Γαρχικές της f τότε $G(x)=F(x)+c$.

Αξιίζει να θυμάσαι ότι: $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$,

$$\int \eta\mu(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \sigma\upsilon\nu(ax+b) + c,$$

$$\int \sigma\upsilon\nu(ax+b) dx = \frac{1}{a} \eta\mu(ax+b) + c,$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + c,$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax+b} + c, \text{ βέβαια θα}$$

μπορούσες με την τεχνική του 'Θέτω' $ax+b=t$ να τα υπολογίσεις πολύ εύκολα ...

Το ίδιο ισχύει και για τα επόμενα θέτοντας $f(x)=t$

$$\int f^v(x) f'(x) dx = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$\int \eta\mu f(x) f'(x) dx = -\sigma\upsilon\nu f(x) + c$$

$$\int \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) dx = \eta\mu f(x) + c$$



3191. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - \eta\mu x \ln x dx$

3192. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\phi 2x - \frac{2x}{\eta\mu^2 2x} dx$

3193. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x} dx$

3194. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\eta\mu 2x + 2x \sigma\upsilon\nu 2x) dx$

3195. $\int_1^3 (3x^2 + 1) \sqrt{x^3 + x + 1} dx$

3196. $\int_1^3 e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx$

3197. $\int_1^e \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} dx$

3198. $\int_1^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

3199. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu x e^{-\eta\mu x} dx$

3200. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\phi x}{\ln(\eta\mu x)} dx$

3201. $\int_1^3 x e^{x^2} + \frac{1}{x \ln x} dx$

3202. $\int_1^3 \sigma\phi x + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

3203. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$

3204. $\int_2^3 \frac{x}{x^2+x-2} dx$

3205. $\int_2^3 \frac{x^3+x}{x^2-1} dx$

3206. $\int_2^3 \frac{x^3+x}{1-x} dx$

3207. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων
Αν ο βαθμός του αριθμητή < του
παρονομαστή τότε έχω δύο επιλογές

- Θέτω τον παρονομαστή με t όταν ο αριθμητής εκφράζει την παράγωγο του παρονομαστή
- Εφαρμόζω την τεχνική Α,Β

Αν ο βαθμός του αριθμητή $\geq$ του
παρονομαστή κάνουμε την διαίρεση
των πολωνύμων



3208. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x \sigma \upsilon \nu 2 x \sigma \upsilon \nu 3 x d x$

3209. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu^2 \frac{x}{4} d x$

3210. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x \eta \mu 2 x d x$

3211. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu \frac{x}{2} \sigma \upsilon \nu^2 \frac{x}{2} d x$

3212. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^2 \frac{x}{2} d x$

3213. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma \upsilon \nu^4 \frac{x}{4} d x$

3214. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3 \eta \mu x + 1)^2 d x$

3215. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sigma \upsilon \nu 3 x d x$

3216. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\eta \mu^2 x} d x$

3217. $\int_1^e x \ln x d x$

3218. $\int_1^e (x+1) \ln(x+2) d x$

3219. $\int_1^e \ln x d x$

3220. $\int_1^e \ln^2 x d x$

3221. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta \mu 2 x d x$

3222. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sigma \upsilon \nu 2 x d x$

3223. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} d x$

3224. $\int_1^0 x e^{-x} d x$

Παραγοντική Ολοκλήρωση

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)G'(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

Η σειρά προτίμησης για την εκκίνηση της διαδικασίας είναι :

$$e^x \rightarrow \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} \rightarrow x, x^2, x^3 \rightarrow \ln x$$

Προσοχή : στην περίπτωση εμφάνισης εκθετικής με τριγωνομετρική τότε δημιουργείται 'κυκλική' διαδικασία .

Είναι προφανές ότι

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Αναγωγικοί τύποι

Δημιουργούνται όταν

ολοκληρώματα I_v έχουν μέσα

τους δυνάμεις με εκθέτη το v .

Συνήθως εφαρμόζουμε

παραγοντική ολοκλήρωση και

δημιουργούμε ποσότητες όπως το

$$I_{v-1}, I_{v-2}$$



3225. $\int_1^3 \frac{e^{3x}}{e^x + 3} dx$

3226. $\int_1^3 \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1} dx$

3227. $\int_1^3 \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx$

3228. $\int_1^3 \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 4} dx$

3229. $\int_1^3 \frac{x+1}{x^2 + 2x} dx$

3230. $\int_1^3 e^{2x-3} dx$

3231. $\int_1^3 x\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)^3 dx$

3232. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \varepsilon \phi x}{\sin^2 x} dx$

3233. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^5 x \sigma \upsilon \nu^2 x dx$

3234. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu 3x \sigma \upsilon \nu x dx$

3235. $\int_1^3 3 \cdot 4^x - 4e^{3x} dx$

3236. $\int_1^3 x e^x dx$

3237. $\int_1^3 \frac{x+2}{x+5} dx$

3238. $\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 9} dx$

3239. $\int_1^3 (x+3)e^{3x} dx$

3240. $\int_1^3 x^2 e^x dx$

3241. $\int_0^1 e^x \eta \mu x dx$

3242. $\int_1^0 e^{-x} \eta \mu 2x dx$

3243. $\int_2^3 \frac{2x-3}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα :

Αν εμφανίζονται αθροίσματα ή διαφορές ημαχ.συνβχ τότε σπάμε το ολοκλήρωμα .

Αν εμφανίζονται απλά γινόμενα τότε ακολουθώ τους τριγωνομετρικούς τύπους :

- $2\eta\mu\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta)$
- $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$
- $2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

Αν εμφανίζονται γινόμενα με δυνάμεις $\int \eta \mu^{\nu} x \sigma \upsilon \nu^{\mu} x dx$

τότε αν

- ν άρτιο , μ περιττό σπάω τη δύναμη που έχει εκθέτη το μ σε γινόμενο
 $\sigma \upsilon \nu x \bullet \sigma \upsilon \nu^{\mu-1} x$ ώστε $\mu-1$ να είναι άρτιο και χρησιμοποιώ τους τύπους
 $\eta \mu^2 x = 1 - \sigma \upsilon \nu^2 x$ ή
 $\sigma \upsilon \nu^2 x = 1 - \eta \mu^2 x$ και συνεχίζω με 'θέσιμο'
- αν ν,μ άρτια τότε χρησιμοποιώ τύπους αποτετραγωνισμού :
 $\sigma \upsilon \nu^2 x = \frac{1 + \sigma \upsilon \nu 2x}{2}$ ή
 $\eta \mu^2 x = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2x}{2}$
- αν ν,μ περιττοί τότε κάνουμε διάσπαση στο μικρότερο περιττό εκθέτη και ακολουθώ τα βήματα της πρώτης περίπτωσης



3244. $\int_4^3 \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx$

3245. $\int_1^e x^2 \ln^2 x dx$

3246. $\int_1^3 \frac{\ln 3x}{x^2} dx$

3247. $\int_1^0 e^x \sin 2x dx$

3248. $\int_1^0 x^2 \sin x dx$

3249. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$

3250. $\int_4^3 x \sqrt{x^2-4} dx$

3251. $\int_1^3 x \sqrt{x^2+9} dx$

3252. $\int_1^3 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x}} dx$

3253. $\int_1^3 x \sqrt{1+x^2} dx$

3254. $\int_1^{\frac{1}{2}} x \sqrt{1-x} dx$

Να υπολογίσεις τα ολοκληρώματα :

3255. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

3256. $\int_1^3 \frac{x e^x + 2}{x} dx$

3257. $\int_1^0 (e^x - \sqrt{x}) dx$

3258. $\int_1^3 (\sqrt{x} - 2)^2 dx$

3259. $\int_1^2 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x^3} dx$

3260. $\int_1^3 12(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) dx$

3261. $\int_1^3 4\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} dx$



3262. $\int_2^3 \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x-1} dx$

3263. $\int_1^3 \frac{3}{3x+4} + \frac{2}{2x-1} + \frac{5}{5x+3} dx$

3264. $\int_0^\pi \frac{2\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x + 4}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

3265. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x}$

3266. $\int_1^3 \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2 + 1} dx$

3267. $\int_0^\pi 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx$

3268. $\int_1^3 \frac{2 \ln x}{x} dx$

3269. $\int_0^\pi \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} dx$

3270. $\int_1^2 12x\eta\mu(6x^2 - 1) dx$

3271. $\int_1^3 (3x^2 - 2x) e^{x^3 - x^2 + 2} dx$

3272. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu(\sigma\phi x)}{\eta\mu^2 x} dx$

Να υπολογίσεις τα παρακάτω ολοκληρώματα :

3273. $\int_{-1}^0 \frac{3x-1}{x^2-4x+3} dx$

3274. $\int_2^3 \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx$

3275. $\int_{-1}^0 \frac{x-4}{x^2-4x+3} dx$

3276. $\int_2^3 \frac{3}{x^2-1} dx$

3277. $\int_2^3 \frac{10x^2+2}{x^3-2x^2-x+2} dx$

3278. $\int_1^3 \frac{x^2-5x+8}{x^3-4x^2+3x} dx$



3279. $\int_1^2 \frac{x+2}{x-3} dx$

3280. $\int_1^0 \frac{2x^3 - 10x^2 + 15x - 1}{x^2 - 6x + 5} dx$

3281. $\frac{x^3 - 6x^2 + 7x - 6}{x^2 - 6x + 5} dx$

3282. $\int_1^3 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

3283. $\int_1^3 \frac{x^2 + x + 4}{x + 2} dx$

3284. $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2 - x} dx$

3285. $\int_1^3 \frac{x+3}{4x^2 - 1} dx$

3286. $\int_1^0 \frac{8}{x^2 - 4} dx$

Να υπολογίσεις τα ολοκληρώματα :

3287. $\int_0^1 \frac{2x-1}{e^x} dx$

3288. $\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$

3289. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

3290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

3291. $\int_0^1 x^2 e^{x+3} dx$

3292. $\int_0^1 x \ln x dx$

3293. $\int_1^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3294. $\int_1^3 \ln^2 x dx$

3295. $\int_1^3 4x \ln \sqrt{x} dx$

3296. $\int_1^3 \frac{2 \ln x}{(x+2)^2} dx$

Σε τριγωνομετρικές
ολοκληρώσεις είναι χρήσιμο
να θέσω $x=\pi-u$



3297. $\int_1^3 e^{2x} \eta \mu x dx$

3298. $\int_1^3 e^{-x} \sigma \upsilon \nu 2x dx$

3299. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - 2}{e^x + 3} dx$

3300. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma \phi x dx$

3301. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x + 2) \ln(e^x + 2)} dx$

3302. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\eta \mu^3 x \sigma \upsilon \nu x dx$

3303. $\int_1^3 (2x+1)e^{x^2+x} dx$

3304. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx$

3305. $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$

3306. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{4x} - e^x}{e^x + 3} dx$

3307. $\int_1^3 x \sqrt{x^2+1} dx$

3308. $\int_1^3 x \sqrt{x+2} dx$

3309. $\int_1^3 \frac{4x+3}{\sqrt{3x+5}} dx$

3310. $\int_1^3 \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} dx$

3311. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[4]{x+2}}{x+2} dx$

3312. $\int_1^3 \frac{e^{2x} + 4e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$

3313. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta \mu x} dx$

3314. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Ολοκλήρωση εκθετικών :

Θέτω $e^x = t$



3315. $\int_e^3 \frac{2 \ln x + \sqrt{\ln x}}{x \ln x} dx$

3316. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 \sin x}{\eta \mu^2 x - 7 \eta \mu x + 10} dx$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

3317. $\int_1^2 \frac{x^2 - 5x + 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

3318. $\int_1^2 \frac{4x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2} dx$

3319. $\int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx$

3320. $\int_0^2 x^2 - 3x + 2 dx$

3321. $\int_{-5}^{-3} \frac{1}{x+1} dx$

3322. $\int_2^3 \frac{1}{2x-3} dx$

3323. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$

3324. $\int_1^2 \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx$

3325. $\int_0^1 3 \cdot 4^x - 4e^{2x} dx$

3326. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma \upsilon \nu 3x dx$

3327. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x} dx$

3328. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu x - 2} dx$

3329. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu 2x dx$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Αν F η παράγουσα της f τότε

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, αξίζει να θυμάσαι ότι :

- Αν $a=b$ τότε αποτέλεσμα 0
- Αν $f(x) \geq 0$ τότε εκφράζει το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της $f(x)$, x και τις ευθείες $x=a, x=b$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- Αν $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$
- $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Ολοκλήρωμα συνάρτησης
πολλαπλού τύπου :

Εξετάζω αν η συνάρτηση είναι συνεχής και σπάω το ολοκλήρωμα σύμφωνα με τα όρια ολοκλήρωσης και το πεδίο ορισμού των κλάδων .

Ολοκλήρωμα που περιέχει απόλυτο :

‘βγάξω’ το απόλυτο και δουλεύω όπως πριν .



3330. $\int_1^2 e^{2x-3} dx$

3331. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu 3x \sigma\upsilon\nu x dx$

3332. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 6x \sigma\upsilon\nu x dx$

3333. $\int_{-1}^1 x e^{3x} dx$

3334. $\int_0^2 e^x (x^2 + 2) dx$

3335. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu 2x dx$

3336. $\int_1^2 x e^x dx$

3337. $\int_0^8 \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx$

3338. $\int_1^2 \frac{1}{x^2-9} dx$

3339. $\int_0^2 \frac{x+2}{x+5} dx$

3340. $\int_{-1}^1 \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2} dx$

3341. $\int_0^{\pi} x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$

3342. $\int_0^{\pi} e^{-x} \eta\mu 2x dx$

3343. $\int_2^3 \frac{2x-3}{x^3+x^2-2x} dx$

3344. $\int_3^5 \frac{x^4-2x^2+6x+2}{x^3-3x^2+2x} dx$

3345. $\int_1^2 (x^2+1) \ln(x+1) dx$

3346. $\int_1^e x \ln 2x dx$

3347. $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2x}{e^{3x}} dx$

3348. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$



3349. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$

3350. $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$

3351. $\int_0^1 (2x+1)^2 (x-1)^5 dx$

3352. $\int_{-3}^{-4} (2x-1)^2 (x+2) dx$

3353. $\int_1^{3e} \frac{\ln x}{x} dx$

3354. $\int_0^1 (x^2+1)e^{x^3+3x+1} dx$

3355. $\int_2^3 \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

3356. $\int_0^3 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x}} dx$

3357. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \sigma \upsilon \nu^3 x dx$

3358. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sigma \upsilon \nu x} \eta \mu x dx$

3359. $\int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu^3 x \sigma \upsilon \nu^2 x dx$

3360. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\varepsilon \varphi x)}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx$

3361. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma \upsilon \nu^3 x}{\eta \mu^2 x} dx$

3362. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^5 x dx$

3363. $\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$

3364. $\int_{\frac{1}{e}}^{2e} \frac{|\ln x|}{x} dx$

3365. $\int_0^2 e^{|x-1|} dx$

3366. $\int_0^2 |x-1| + e^{|2x-1|} dx$

3367. Έστω ότι: $\int_2^3 f(x) dx = 4$ και $\int_2^3 g(x) dx = 2$ Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:



- $A = \int_2^3 (f(x) + g(x)) dx$
- $B = \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx$
- $\Gamma = \int_2^3 (2f(x) - g(x) + 4) dx$
- $\Delta = \int_2^3 (f(x) + 3g(x) - 5) dx$

3368. Να αποδείξετε ότι:

- $\int_1^4 \frac{3x^2+10}{x^2+2} dx - \int_1^4 \frac{4}{x^2+2} dx = 9$
- αν $\int_0^\pi f(x) \sin^2 x dx = \int_0^\pi f(x) \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$, τότε $\int_0^\pi f(x) dx = \pi$

3369. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να γράψετε στη μορφή $\int_a^b f(x) dx$ τις παραστάσεις:

- $\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx$
- $\int_{-3}^5 f(x) dx - \int_0^5 f(x) dx + \int_5^6 f(x) dx$

3370. Αν είναι: $\int_2^5 f(x) dx = -2$, $\int_3^5 f(x) dx = -3$ και $\int_8^{10} f(x) dx = 4$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $\int_5^8 f(x) dx$
- $\int_2^{10} f(x) dx$
- $\int_5^{10} f(x) dx$
- $\int_2^8 f(x) dx$

3371. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,5]$ και επιπλέον:

$$\int_1^4 f(x) dx = 1, \quad \int_2^5 f(x) dx = 3, \quad \int_2^4 f(x) dx = -3 \quad \text{και} \quad \int_3^5 f(x) dx = 6$$

να αποδείξετε ότι: $\int_1^3 f(x) dx = 1$

3372. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$, να αποδείξετε ότι:



$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \cdot \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx \cdot \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

3373. Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Έστω επίσης $f(x) \leq 0$ για $x \in [0,1]$ και:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x) f(t) dt \right) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \quad \text{Να αποδείξετε ότι } \int_0^1 f(x) dx = -2.$$

3374. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι: $e^{\int_0^1 f(x) dx} = \int_0^1 (f(x) + 3x^2) dx$

να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

3375. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\int_0^1 \left(\int_1^2 x f(t) dt \right) dx > 1$, τότε: $\int_1^2 f(x) dx > 2$

3376. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 (3x^2 + 2x + e^x) dx$

- $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x) dx$

- $\Gamma = \int_2^3 \left(e^{x-2} + \frac{1}{x-1} \right) dx$

- $\Delta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx$

3377. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 3x^2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

3378. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3|x^2 - 2x| + 1$.

- Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς απόλυτες τιμές.

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 f(x) dx$.

3379. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_1^3 f(x) dx, \quad f(x) = 2|x - 2|$

- $B = \int_0^2 f(x) dx, \quad f(x) = 3|x^2 - 1| - 3$



- $\Gamma = \int_{-1}^1 f(x)dx, \quad f(x) = |e^x - 1|$
- $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx, \quad f(x) = |2\eta\mu x - 1|$

3380. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ και $J = \int_{-2}^0 \sqrt{4 - x^2} dx$

3381. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_{-1}^3 \sqrt{3 + 2x - x^2} dx$
- $B = \int_2^4 \sqrt{-x^2 + 6x - 8} dx$

3382. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $x^2 f^2(x) + 1 \geq 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\int_1^2 x^2 f^2(x)dx + 1 \geq 2 \int_1^2 x f(x)dx$

3383. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις: $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- $\int_0^1 f^2(x)dx + 1 \geq 2 \int_0^1 f(x)dx$
- $2 + \int_0^1 f^2(x)dx \geq 2 \int_0^1 f(x)g(x)dx$ με $\int_0^1 g^2(x)dx = 2$
- $1 + 3 \int_0^1 f^2(x)dx \geq 6 \int_0^1 x f(x)dx$

3384. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $1 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [0,1]$ και:

$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι:

- $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 2$
- $1 \leq \int_0^1 f^2(x)dx \leq 4$
- $\int_0^1 f^2(x)dx \leq \frac{5}{2}$



- $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq 2$
- $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}$
- $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{3}{4}$
- $\int_0^1 x f(x) dx \leq 2$
- $\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{1}{2}$

3385. Να αποδείξετε ότι:

- $\int_\alpha^\beta (x^4 + 1) dx > 0$ για κάθε $\alpha < \beta$
- $\int_{2022}^{2021} (e^{x^2} + 1) dx < 0$
- $\int_\alpha^\beta (e^{-x^2} + 2) dx \leq 0$ για κάθε $\alpha \geq \beta$
- $\int_2^5 (3x^2 - 4x + 3) dx < \int_2^5 (2x^2 + 3x - 7) dx$
- $\int_2^3 \frac{x^2 + x}{x^2 - 6x + 5} dx < 0$

3386. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta e^{2x} dx > \int_\alpha^\beta (2x + 1) dx$.

3387. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

- $\int_\alpha^\beta e^x dx > \int_\alpha^\beta (x + 1) dx, \quad \alpha < \beta$
- $\int_\alpha^\beta \ln x dx < \int_\alpha^\beta (x - 1) dx, \quad 0 < \alpha < \beta$

3388. Να αποδείξετε ότι:

- $\int_\alpha^\beta (e^x - x^2) dx > \int_\alpha^\beta (2 - e^{-x}) dx, \quad \alpha < \beta$
- $\int_\alpha^\beta x^x dx > \int_\alpha^\beta e^{x-1} dx, \quad \alpha < \beta$



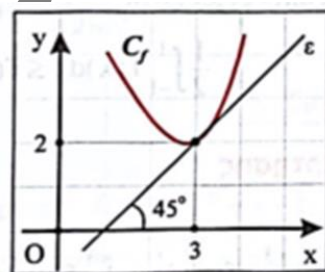
- $\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + 1)^{x^2+1} dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2} dx, \quad \alpha < \beta$

3389. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις: $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ Να αποδείξετε ότι:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$ όπου m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα στο $[\alpha, \beta]$.
- $\frac{m}{M}(\beta - \alpha)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{M}{m}(\beta - \alpha)^2$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

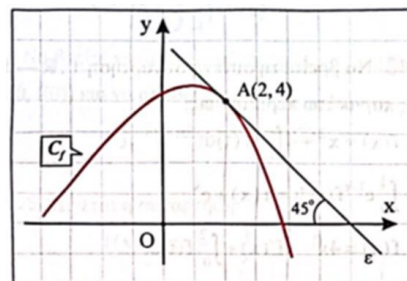
3390. Στο διπλανό σχήμα η f είναι κυρτή συνάρτηση και η (ϵ) είναι εφαπτομένη. Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) \geq x - 1, x \in \mathbb{R}$
- $\int_2^4 f(x) dx > 4$



3391. Η συνάρτηση f είναι κοίλη. Έστω η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, 4)$.

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 6$.
- Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(x) dx < 6$.



3392. Δίνεται η κοίλη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) \leq 2x + 1$
- $\int_0^3 f(x) dx < 12$

3393. Δίνεται η συνεχής και κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 2$

- Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2, f'(1) = 2$.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{2} = x$.
- Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 x f(x) dx > \frac{14}{3}$.



3394. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και:

$|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ Να αποδείξετε ότι:

- $-x \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0,1]$
- $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{2}$

3395. Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να λύσετε την ανίσωση $\int_x^{x^3} f(t) dt \leq 0$.

3396. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι: $f(0) = 0$, $g(0) = 2$

και $f(1) = g(1)$ Αν η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι:

- $g(x) - f(x) \geq -2x + 2$, $x \in [0,1]$
- $\int_0^1 g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx + 1$

3397. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f''(x) > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f'(1) = 2$, $f(1) = -3$ Να αποδείξετε ότι:

- $\frac{f(x)+5}{2} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\int_1^3 f(x) dx > -2$
- υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) > -1$

3398. Δίνεται η παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(1) = 2$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < 1$.

3399. Δίνεται μια παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
- $\int_\alpha^\beta f(x) dx \geq (\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

3400. Να αποδείξετε ότι:



$$\bullet \quad t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \geq 0$$

$$\bullet \quad \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e\sqrt{e^2-1}}{2}$$

3401. Έστω η κυρτή συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \leq f(-1) + f'(1)$

3402. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\bullet \quad A = \int_1^2 (2x + 1) dx$$

$$\bullet \quad B = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 3) dx$$

$$\bullet \quad \Gamma = \int_0^1 (3x^2 - 2x + e^x) dx$$

$$\bullet \quad \Delta = \int_0^1 (e^x + 4x^3 - 2) dx$$

$$\bullet \quad E = \int_0^\pi (\sin x - \eta \mu x) dx$$

$$\bullet \quad \Sigma T = \int_0^\pi (3\eta \mu x - 2\sigma \upsilon \nu x) dx$$

$$\bullet \quad Z = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\bullet \quad H = \int_3^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$\bullet \quad \theta = \int_2^3 \left(e^{x-2} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$\bullet \quad I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} \right) dx$$

3403. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\bullet \quad A = \int_1^9 \sqrt{x} dx$$

$$\bullet \quad B = \int_0^1 x \sqrt{x} dx$$

$$\bullet \quad \Gamma = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$$

$$\bullet \quad \Delta = \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}+1}{x+1} dx$$

3404. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:



- $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi x dx$
- $B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\phi x dx$
- $\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \epsilon\phi^2 x) dx$
- $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon\phi^4 x + \epsilon\phi^2 x) dx$

3405. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 2 x e^{x^2} dx$
- $B = \int_0^1 3 x^2 e^{x^3} dx$
- $\Gamma = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$
- $\Delta = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$

3406. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi^2 x dx$
- $B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\phi^2 x dx$

3407. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^{\pi} e^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx$
- $B = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x dx$
- $\Gamma = \int_0^{\pi} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$
- $\Delta = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x dx$
- $E = \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$
- $\Sigma T = \int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx$

3408. Να αποδείξετε ότι:



- $\int_0^2 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^2 \frac{dx}{1+e^{-x}} = 2$
- $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+e^x} dx + \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+e^{-x}} dx = 0$

3409. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 f^3(x) f'(x) dx$ με $f(0) = 0, f(1) = 4$
- $B = \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ με $f(1) = e, f(2) = 1$
- $\Gamma = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$ με $f(1) = 0, f(0) = 1$
- $\Delta = \int_2^4 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx$ με $f(2) = 1, f(4) = 4$
- $E = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx$ με $f(0) = 1, f(1) = 2$
- $Z = \int_0^1 \left[(f'(x))^2 + f(x) f''(x) \right] dx$ με $f(0) = f(1) = 0$

3410. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,2]$ με $f(0) = 0$ και $f(2) = e^2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^2 e^x (f'(x) + f(x)) dx$
- $B = \int_0^2 e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx$
- $\Gamma = \int_0^2 e^{2x} (f'(x) + 2f(x)) dx$
- $\Delta = \int_0^2 e^{-3x} (f'(x) - 3f(x)) dx$

3411. Μια συνάρτηση f με $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 x^2 (3f(x) + x f'(x)) dx$
- $B = \int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx$

3412. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_1^3 f(x) dx, \quad f(x) = 2|x - 2|$



- $B = \int_0^2 f(x)dx, \quad f(x) = 3|x^2 - 1| - 3$

- $\Gamma = \int_{-1}^1 f(x)dx, \quad f(x) = |e^x - 1|$

- $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx, \quad f(x) = |2\eta\mu x - 1|$

3413. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1, & \text{αν } x \geq e \\ 1 - \ln x, & \text{αν } 0 < x < e \end{cases}, \quad A = \int_1^{e^3} f(x)dx$

- $f(x) = 3|x^2 - 4| + 2x, \quad B = \int_0^4 f(x)dx$

- $f(x) = |\ln x|, \quad \Gamma = \int_{\frac{1}{e}}^e f(x)dx$

- $f(x) = |e^x - x - 1|, \quad \Delta = \int_{-1}^1 f(x)dx$

3414. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της. Να αποδείξετε ότι:

- $\int_1^2 f(x+3)dx = \int_4^5 f(x)dx$

- $\int_2^3 (f(x+5) - f(x+4))dx = \int_5^6 (f(x+3) - f(x+2))dx$

3415. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x+\delta) - f(x+\gamma))dx = \int_{\gamma}^{\delta} (f(x+\beta) - f(x+\alpha))dx$

3416. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = 3x^2 + 2x + \int_0^2 f(x)dx, \quad x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = 2x^3 + x \int_0^1 f(x)dx, \quad x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = e^x + \frac{1}{e} \int_0^1 f(x)dx, \quad x \in \mathbb{R}$

3417. Έστω η συνεχής συνάρτηση: $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right] dx = 5 \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - 6$

- $\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x)f(u)dx \right] du = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$



3418. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 x e^x dx$
- $B = \int_0^1 x^2 e^x dx$
- $\Gamma = \int_0^1 x e^{-x} dx$
- $\Delta = \int_0^1 x e^{2x} dx$
- $E = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$
- $\Sigma T = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
- $Z = \int_0^1 x^2 e^{-3x} dx$
- $H = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx$

3419. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^\pi x \sin x dx$
- $B = \int_0^\pi x \eta \mu x dx$
- $\Gamma = \int_{-\pi}^\pi x^2 \sin x dx$
- $\Delta = \int_{-\pi}^\pi x^2 \eta \mu x dx$
- $E = \int_0^\pi x \eta \mu 2x dx$
- $\Sigma T = \int_0^\pi x^2 \sin 2x dx$
- $Z = \int_0^\pi x^2 \eta \mu 3x dx$
- $H = \int_0^\pi x^3 \sin x dx$

3420. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_1^e \ln x dx$
- $B = \int_1^e x \ln x dx$



- $\Gamma = \int_1^e x^2 \ln x dx$
- $\Delta = \int_1^e \ln^2 x dx$
- $E = \int_1^e x^2 \ln^3 x dx$
- $\Sigma T = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$

3421. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 (x+1) e^x dx$
- $B = \int_2^e \ln(x+1) dx$
- $\Gamma = \int_1^e 2x \ln(x^2+1) dx$
- $\Delta = \int_0^1 (2x+1) \ln^2 x dx$

3422. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$
- $B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta \mu^2 x} dx$
- $\Gamma = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(1+e^x) dx$
- $\Delta = \int_{-1}^1 x \ln(x^2+3) dx$

3423. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

- $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \cdot \ln(1 + \sigma \upsilon \nu x) dx$
- $B = \int_0^{\pi} \sigma \upsilon \nu x \cdot \ln(1 + \eta \mu x) dx$
- $\Gamma = \int_0^{\pi} \eta \mu x \cdot \ln(1 + \eta \mu x) dx$
- $\Delta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu x \cdot \ln(1 + \sigma \upsilon \nu x) dx$

3424. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f(1) = f'(1) = 0$, να αποδείξετε ότι:



- $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x f'(x)dx$
- $\int_0^1 x^2 f''(x)dx = 2 \int_0^1 f(t)dt$

3425. Να βρείτε την τιμή $f(1)$, αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0,1]$ και:

$$\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 2023 - 2 \int_0^1 x f(x)dx$$

3426. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f(\pi) = 3$ και: $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 7$ να αποδείξετε ότι $f(0) = 4$.

3427. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, \pi]$, η C_f διέρχεται από το σημείο $A(\pi, 1)$ και ισχύει: $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sigma \upsilon \nu x dx = 1$ να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $B(0, -2)$.

3428. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο και: $f(\alpha) = f(\beta) = g(\alpha) = g(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f''(x)g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)g''(x)dx$

3429. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx$
- $B = \int_0^\pi e^x \sigma \upsilon \nu x dx$
- $\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \eta \mu x dx$
- $\Delta = \int_0^\pi e^{2x} \sigma \upsilon \nu x dx$

3430. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \eta \mu 2x dx$
- $B = \int_0^\pi e^{3x} \sigma \upsilon \nu 3x dx$
- $\Gamma = \int_0^\pi e^{-x} \sigma \upsilon \nu 2x dx$
- $\Delta = \int_1^e \sigma \upsilon \nu (\ln x) dx$

3431. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_1^e e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx$



- $B = \int_1^e e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$

3432. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_1^e \frac{x+1}{x} e^x dx$

- $B = \int_1^e \frac{1+x \ln x}{x} e^x dx$

3433. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_{-3}^0 x \sqrt{1-x} dx$

- $B = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

- $\Gamma = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

- $\Delta = \int_2^7 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx$

- $E = \int_2^5 x \sqrt{x-1} dx$

- $\Sigma T = \int_0^7 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$

3434. Να αποδείξετε ότι:

- $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx$

- $\int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx$

3435. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$

- $B = \int_0^{\pi^2} \eta \mu \sqrt{x} dx$

- $\Gamma = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$

- $\Delta = \int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx$

- $E = \int_0^1 x^7 e^{x^4} dx$



• $\Sigma T = \int_0^1 x^5 e^{x^3} dx$

3436. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

• $A = \int_0^\pi \eta \mu^3 x dx$

• $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^3 x dx$

3437. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

• $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu^3 x + \eta \mu^4 x) \sigma \upsilon \nu x dx$

• $B = \int_0^\pi (\sigma \upsilon \nu^4 x + \eta \mu^2 x) \eta \mu x dx$

• $\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^5 x \sigma \upsilon \nu^2 x dx$

• $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^4 x \sigma \upsilon \nu^3 x dx$

3438. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

• $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^4 x} dx$

• $B = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta \mu^4 x} dx$

3439. Αν η f είναι συνεχής και: $\int_0^1 x^3 f(x^4) dx = 2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2 \int_0^1 x f(x^2) dx + 3 \int_0^1 x^2 f(x^3) dx$$

3440. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e (x^{\ln x} + e^{\sqrt{\ln x}}) dx = e^2 - 1$

3441. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \dots + f(x+2020) = 4042x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{2021} f(x) dx = 2021$

3442. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αν $1 < \alpha < \beta$ και:

$$\int_\alpha^\beta f(\ln x) dx = - \int_{\ln \alpha}^{\ln \beta} f'(x) e^x dx \quad \text{να αποδείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε:}$$



$$f(\ln x_0) + f'(\ln x_0) = 0$$

3443. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx$
- $B = \int_0^2 \frac{3x-2}{x^2+x-12} dx$
- $\Gamma = \int_0^1 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} dx$
- $\Delta = \int_0^1 \frac{2x^3-3x^2-11x+1}{x^2-x-6} dx$

3444. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 \frac{3x^2+6}{x^3+6x+10} dx$
- $B = \int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^2+x+1} dx$
- $\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$
- $\Delta = \int_0^4 \frac{2x^3-3x^2-4x+2}{x^2-3x+2} dx$
- $E = \int_2^3 \frac{6x^2+x-3}{x^2(x-1)} dx$
- $\Sigma T = \int_0^1 \frac{3x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$

3445. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- $A = \int_0^1 \frac{4x+7}{x^2+x-6} dx$
- $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x + 7}{\sin^2 x + \sin x - 6} \eta \mu x dx$
- $\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$
- $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x + 3 \eta \mu x + 2} dx$
- $E = \int_0^1 \frac{2x^2-5x}{x^2-5x+6} dx$
- $\Sigma T = \int_0^1 \frac{2e^{3x}-5e^{2x}}{e^{2x}-5e^x+6} e^x dx$



3446. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $A = \int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

- $B = \int_5^{12} \frac{1+\sqrt{x+4}}{x} dx$

- $\Gamma = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx$

- $\Delta = \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$

- $E = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

- $\Sigma T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x + 3 \eta \mu x + 2} dx$

3447. Αν η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$ έχει συνεχή παράγωγο, $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$, να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)} dx$



Να βρεις τη συνάρτηση $f(x)$ αν γνωρίζεις την παράγωγό της

ΤΕΧΝΙΚΗ 1 : ζητάμε να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία γνωρίζω κάποια από τις παραγώγους της π.χ. : αν γνωρίζω την f' τότε κάνω μία ολοκλήρωση και θα βρω ένα c , αν γνωρίζω την f'' τότε θα χρειαστώ δύο ολοκληρώσεις και θα βρω c_1, c_2 .

ΤΕΧΝΙΚΗ 2 : ζητάμε να βρεθεί η συνάρτηση f μέσα από σχέση στην οποία δίνεται η f και κάποια από τις παραγώγους της . Ο σκοπός μας είναι να απομονώσω την f με την f' σε ένα μέλος (είτε μαζί , είτε πάνω κάτω) για να μπορέσω να τις μετατρέψω σε μία παράγωγο και να ολοκληρώσω , π.χ. :

- $e^{f(x)} f'(x) \rightarrow (e^{f(x)})'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow (\ln |f(x)|)'$
- $\eta \mu f(x) f'(x) \rightarrow (\sigma \upsilon \nu f(x))'$ και
- $f^4(x) f'(x) \rightarrow \left(\frac{f^5(x)}{5} \right)'$



Ακολουθούν ασκήσεις για εξάσκηση :

- 3448.** Για μία συνάρτηση f η κλίση της σε κάθε σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $2x_0 + 1$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$, να βρεθεί η συνάρτηση .

$$f(x) = x^2 + x + 2$$

- 3449.** Η ταχύτητα ενός κινητού είναι $u(t) = 5 + 2t + 3t^2, 0 \leq t \leq 8$. Να βρεις τη συνάρτηση της απόστασης αν γνωρίζεις ότι συνολικά διέτρεξε 640 μ .

$$s(t) = t^3 + t^2 + 5t + 24$$

- 3450.** Ένα φύλλο χαρτί καίγεται σε 4 sec .Το εμβαδό της επιφάνειας μειώνεται με ρυθμό $5t \frac{cm^2}{sec}$, ποιο το αρχικό του εμβαδό ;

$$f(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 40$$

- 3451.** Αν $f''(x) = \frac{x}{2} + 3$ και διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$, $B(6,79)$ να βρεις τη συνάρτηση .



$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

3452. Αν $f''(x) = x\eta\mu x$ και η συνάρτηση τέμνει τους άξονες στα ίδια σημεία που τέμνει και η $2x+\pi y=\pi$, να βρεις τη συνάρτηση.

$$f(x) = -x\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x + ax + b$$

3453. Η f έχει μέγιστο στο 1 με τιμή $\frac{e+1}{e}$ και $f''(x) = (x-2)e^{-x}$, να βρεις τη συνάρτηση.

3454. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{x(1+\ln x)-2}{x}$ με ακρότατο στο $x=1$, να βρεις τη μονotonία της f .

3455. Αν $f: x f'(x) = e^{-x} - f(x)$, $f(2) = e^{-1} \Rightarrow f(x) =$;

$$f(x) = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{2e+1}{e^2 x}$$

3456. Αν $f: f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = \ln(x+1)$, $f'(2) = 0$, $x > 1 \Rightarrow f(x) =$;

$$f(x) = \frac{x \ln(x+1)}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} + \frac{\ln(x+1)}{\ln x} + \frac{c}{\ln x}$$

3457. Αν $f'(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) =$;, με δύο τρόπους (αν γίνεται)

3458. Να βρεις τη συνάρτηση για την οποία $f'(x) = 8x^3 - \frac{5}{x} + 2$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από

A(1,3)

$$f(x) = 2x^4 - 5 \ln x + 2x - 1$$

3459. Να βρεις τη συνάρτηση που διέρχεται από M(9,50) και η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη x

έχει κλίση $\sqrt{x} + 4x$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 - 130$$

3460. Δίνεται συνάρτηση με $f''(x) = 24x^2 - 6x + 1$ όπου η γραφική παράσταση της f στο σημείο

$A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ έχει εφαπτομένη με κλίση 2

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

3461. Δίνεται $f(x) = 4x \ln x - x f'(x)$, $x > 0$, $f(e) = e \Rightarrow f(x) =$;

$$f(x) = 2x \ln x - x$$



3462. Αν $xf'(x) - f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x + 5}, x > 0, f(1) = \ln 5 \Rightarrow f(x) = ;$

$$f(x) = x \ln(x^2 - x + 5)$$

3463. Αν $f'(x) = f(x) + xe^{2x}, x \in \mathbb{R}, f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = ;$

$$f(x) = (x-1)e^{2x} - \frac{e^x}{4}$$

3464. Αν $f'(x) - 2xf(x) = 2ex, f(0) = e \Rightarrow f(x) = ;$

3465. Αν $f'(x^3) = 2x^5 - 2, f(8) = 44 \Rightarrow f(x) = ;$

3466. Αν $f'(x) = xe^{x-f(x)}, f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = ;$

3467. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), 2 \int_1^2 xf(t)dt = f(x) - x \Rightarrow f(x) = ;$

3468. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) + xf'(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x) + \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}, x \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$ Μονάδες 6
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 - \sigma\upsilon\nu x = x\eta\mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε: $\xi\eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = 1 + \frac{2}{\pi^2}\xi^2$

3469. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) = 1 \text{ και } g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

3470. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(1) = \frac{1}{2}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$



3471. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν:

$$\sqrt{x^2+1}f'(x) + \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \quad f(0) = 0$$

- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f
- Αν $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x^4+1) = f(3x^3+2x^2+3x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ και μια τουλάχιστον ρίζα $(1, 4)$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 4)$

3472. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x+\pi} t \sin t dt$

3473. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \ln t dt - 1}{\int_0^x te^t dt - 1}$

3474. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\int_1^2 f^2(x) dx \leq 0, \quad \Delta = [1, 2]$
- $\int_0^1 (f^2(x) - 2f(x) + 1) dx \leq 0, \quad \Delta = [0, 1]$
- $\int_0^1 (4xf(x) - f^2(x) - 4x^2) dx = 0, \quad \Delta = [0, 1]$
- $\int_2^4 (2xf(x) - f^2(x) - x^2) dx \geq 0, \quad \Delta = [2, 4]$

3475. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\int_0^1 f^2(x) dx + 1 \leq 2 \int_0^1 f(x) dx, \quad \Delta = [0, 1]$
- $\int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{12} \leq \int_0^1 xf(x) dx, \quad \Delta = [0, 1]$
- $4 \int_0^3 xf(x) dx = \int_0^3 f^2(x) dx + 36, \quad \Delta = [0, 3]$
- $2 \int_0^1 xf(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{3}, \quad \Delta = [0, 1]$

3476. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όταν: $f(x) = 2x + 2 \int_0^1 f(x) dx, \quad x \in [0, 1]$

3477. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2 + 4 \int_1^2 t f(t) dt$



- $\int_0^1 e^{1-t} f(t) dt = f(x) + e^x$
- $f(x) = 4x - xf'(x) + \int_0^2 f(t) dt$
- $f(x) = (3x^2 + 1) \int_0^1 f(t) dt - 1$

3478. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $e^{-x} f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και: $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$ να βρείτε τη συνάρτηση f .

3479. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όταν $f(0) = 1$ και $f'(x) = \int_0^1 f(x) dx - f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

3480. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$2 \int_0^1 f^2(x) dx + 1 = 4 \int_0^1 \sqrt{x} \cdot f(x) dx$$

3481. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο. Αν ισχύουν $f(0) = 1$ και: $\int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = f^2(1) - 1$ να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x, x \in [0,1]$.

3482. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$.

- Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\int_{f(x)}^{f'(x)} (e^{t-1} - \ln t) dt = f'(x) - f(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

3483. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x - 1$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω από αυτήν, εκτός του σημείου επαφής.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $A = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 3(\beta^2 - \alpha^2)$$



3484. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι: $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$
- Να αποδείξετε ότι: $\int_{2022}^{2023} x^x dx > \int_{2022}^{2023} e^{x-1} dx$

3485. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f^2(x) + x^2 = 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$, $f(0) = 1$

- Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-1,1)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-f(x)}{x^2}$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

3486. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f^2(x) = 4 - x^2$ για κάθε $x \in [-2,2]$, $f(0) = 2$

- Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-2,2)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f
- να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ και $J = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

3487. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα μόνο σημείο.
- Να αποδείξετε ότι: $e^x > 2x + e^{-x}$ για κάθε $x > 0$

Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

- $\int_{\alpha}^{\beta} (e^x - x^2) dx > \int_{\alpha}^{\beta} (2 - e^{-x}) dx$



- $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

3488. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0) = 0$ και: $f'(x) = g'(x) + e^{2x} - 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το A .
- Να αποδείξετε ότι στο σημείο A οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.
- Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

3489. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t)dt - 45$$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$
- Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύουν:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \quad \text{και} \quad g(0) = g'(0) = 1, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

- $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$,
- η συνάρτηση g είναι "1 - 1". (Θέμα εξετάσεων)

3490. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$
- Με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x > x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:
- $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$



- $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
- $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$
- $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$

3491. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(1+h) = 2 + 2h + 3h^2 + \eta \mu h$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2$ και $f'(1) = 3$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}$ και $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{\eta \mu 2h}$

Έστω ότι η f είναι κυρτή.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 4$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Αν F είναι μια αρχική της f , να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) > 2$.



Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

$$\int_a^b f^{-1}(x)dx = ;$$

Αν γνωρίζω την αντίστροφη της f απλά υπολογίζω το ολοκλήρωμα .

Αν δε μπορώ να βρω την αντίστροφη τότε θέτω :

$$f^{-1}(x) = t \Rightarrow f(t) = x$$

και συνεχίζω ... (μην ξεχάσεις την αλλαγή των ορίων) .

3492. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3 \Rightarrow \exists f^{-1}, \int_{-3}^0 f^{-1}(x)dx = ;$

3493. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \ln f(x) + e^{f(x)} = x$

- να βρεις την $f^{-1}(x)$,
- να υπολογίσεις το άθροισμα $\int_1^e f^{-1}(x)dx + \int_e^{e^e+1} f^{-1}(x)dx$

3494. Δίνεται συνεχής συνάρτηση για την οποία

$$8f^3(x) + 4f(x) - x + 10 = 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = ; , \text{ υπολόγισε } \int_{-2}^{10} f(x)dx$$





Όλη η ύλη εφαρμοσμένη σε ολοκληρώματα

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Μπορεί να σημαίνει :

- $\alpha = \beta$
- $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- το χωρίο της συνάρτησης που βρίσκεται πάνω από τον x χ' είναι όσο και το χωρίο που βρίσκεται κάτω από τον x χ'.

3495. Να υπολογίσεις το $\int_{-1}^4 (3|x^2 - 3x + 2| - 4) dx$

3496. Να λυθεί η εξίσωση : $\int_e^x \frac{1}{u \ln^2 u} du = \frac{1}{2}$

$$e^2$$

3497. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2, g(x) = \ln x \Rightarrow \int_1^e f \circ g(x) dx =$

$$e - 2$$

3498. Να βρεις άρτια, πολωνυμική συνάρτηση 4^{ου} βαθμού με ακρότατο στο $A(2, -6), \int_0^1 f(x) dx = \frac{113}{15}$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

3499. Αν $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 2\pi, f'(\pi) = -\pi \Rightarrow f'(0) =$

$$-\pi$$

3500. Δίνεται συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$ όπου $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0$,

ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, \pi]$

$$f(\pi) + f(0) = 0$$

3501. Δίνεται άρτια συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[-3, 3] \Rightarrow \int_{-3}^3 x f''(x) - f'(x) dx =$

$$0$$

3502. Δίνεται συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο και $\int_0^\pi \eta \mu x f(x) - \sigma \upsilon \nu x f'(x) dx = -2 \Rightarrow f(0) =$

$$-2$$

3503. Δίνεται συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(a) \neq f(b) \Rightarrow \int_a^b \frac{4f(x)f'(x)}{f(b) - f(a)} dx =$

$$2(f(b) + f(a))$$

3504. Δίνεται συνάρτηση που ικανοποιεί το Rolle στο $[0, 1] \Rightarrow \int_0^1 x f''(x) dx = f'(1)$

3505. Ν.δ.ο. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$



3506. Δίνεται συνεχής συνάρτηση όπου $2f(x) + f(-x) = 30x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx =$

$$\frac{20}{3}$$

3507. Δίνεται συνάρτηση περιττή ν.δ.ο. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ & $\int_{-2014}^{2014} x^{2013} \sin x dx = 0$

3508. Δίνεται συνάρτηση άρτια ν.δ.ο. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

3509. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f \Rightarrow \int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^a f(x)dx$

3510. Ν.δ.ο. δεν έχει σημεία καμπής η $f(t) = \int_1^t x + x^{2013} + x^{2015} dx$

3511. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : x \in [a, b], f(x) \leq 0, \int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$

3512. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1} dt, \quad n \in \mathbb{N}$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_0 .
- Να αποδείξετε ότι: $I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} - I_n, \quad n \in \mathbb{N}$
- Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 .

3513. Δίνεται ότι: $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$ και $K_n = \int_1^e x \ln^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$

- Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_1, K_1 .
- Να αποδείξετε ότι: $I_n = e - nI_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$
- Να αποδείξετε ότι: $2K_n + nK_{n-1} = e^2$ για κάθε $n \geq 2$
- Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: I_2, I_3, K_2, K_3

3514. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα: $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ ικανοποιεί τον αναγωγικό τύπο:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad \text{για κάθε } n \geq 2$$

3515. Να αποδείξετε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους:

- Αν $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^n x dx$, τότε: $nI_n = (n-1)I_{n-2}, \quad n \geq 2$



- $\nu J_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x dx$, τότε: $\nu J_\nu = (\nu - 1)J_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$

3516. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ και $g(x) = \ln x$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.
- Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της h^{-1} .

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$
- $J = \int_0^1 h(x) dx$

3517. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \ln(x+1)$ και

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

- Να μελετήσετε τις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$, για κάθε $x > -1$.
- Να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{e+1}{2} \leq \int_0^1 \ln(e^x + 1) dx \leq e - 1$
- Να αποδείξετε ότι: $\int_0^\alpha [f(x) + g(x)] dx \leq \frac{\alpha^2}{2}$, για κάθε $\alpha > -1$

3518. Έστω συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $0 < f''(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$,
- $0 < f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$,
- υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2}$,
- $\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{e^x+f(x)} dx = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$.

3519. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:



$$\int_0^{f(x)} (e^t + 1) dt = x - 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e + 1$.

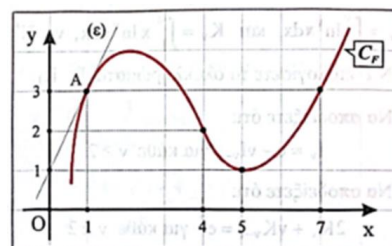
Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι:

- η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$,
- $(x - 1)f'(x) \leq f(x) \leq \frac{x-1}{2}$, για κάθε $x \geq 1$,
- $\int_1^2 f(x) dx \geq \frac{f(2)}{2}$.

3520.

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία (ϵ) εφάπτεται με τη γραφική παράσταση C_F της F , όπου F είναι αρχική μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

- τα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_1^5 f(x) dx$ και $I_2 = \int_4^7 f(x) dx$
- η τιμή $f(1)$ της f στο 1.
- Αν G είναι επίσης αρχική της f , να αποδείξετε ότι $G(1) - G(5) = 2$.



**A15. Θεώρημα**

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε: $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

A16. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

56. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.