



Κωνικές τομές



Κώστας Γλυκός

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 3

405 ασκήσεις

και τεχνικές

σε 51 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

20/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



kglykos.gr

Κωνικές τομές

Κύκλος

Είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από σταθερό σημείο (κέντρο) σταθερή απόσταση ρ (ακτίνα)

Μορφή κύκλου με κέντρο

$K(x_0, y_0)$, ρ ακτίνα :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Εφαπτομένη

πάρε τη μορφή της ευθείας

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \text{ και}$$

χρησιμοποίησε την ιδιότητα ότι το κέντρο απέχει από εφαπτομένη απόσταση ρ δηλ.

$$d(K, \varepsilon) = \rho \text{ (το νου σου η}$$

εφαπτομένη είναι κάθετη σε ακτίνα στο σημείο επαφής και υπάρχει πιθανότητα η εφαπτόμενη να είναι κατακόρυφη της μορφής :

$$x = x_0)$$

Παραβολή

Το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από σταθερή ευθεία (διευθετούσα) και σταθερό σημείο (εστία)

Μορφές παραβολής :

$$y^2 = 2px, E\left(\frac{p}{2}, 0\right), x = -\frac{p}{2}$$

$$x^2 = 2py, E\left(0, \frac{p}{2}\right), y = -\frac{p}{2}$$

Μορφές εφαπτομένης :

$$x^2 = 2py : xx_1 = py + py_1$$

$$y^2 = 2px : yy_1 = px + px_1$$

Έλλειψη

Το σύνολο των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία (εστίες) είναι σταθερό και ίσο με $2a$

Μορφές έλλειψης :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ με εστίες } E(\gamma, 0)$$

και $E'(-\gamma, 0)$ όπου $a^2 = b^2 + \gamma^2$

Κορυφές τα σημεία

$A(a, 0), A(-a, 0), B(0, b), B'(0, -b)$,
εστιακή απόσταση 2γ , μεγάλος
άξονας $2a$, μικρός άξονας $2b$,

εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$,

$$\text{εφαπτομένη } \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

ή

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ με εστίες}$$

$E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$ όπου

$a^2 = b^2 + \gamma^2$ Κορυφές τα σημεία

$A(0, a), A(0, -a), B(b, 0), B'(-b, 0)$,
εστιακή απόσταση 2γ , μεγάλος
άξονας $2a$, μικρός άξονας $2b$,

εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$,

$$\text{εφαπτομένη } \frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$$

Υπερβολή

Το σύνολο των σημείων των οποίων το απόλυτο της διαφοράς των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία (εστίες) είναι σταθερό και ίσο με 2γ

Μορφές υπερβολής :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ με εστίες } E(\gamma, 0)$$

και $E'(-\gamma, 0)$ όπου $\gamma^2 = a^2 + b^2$

Κορυφές τα σημεία

$A(a, 0), A(-a, 0)$, εστιακή

απόσταση 2γ , εκκεντρότητα

$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$, ασύμπτωτες

$$y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ εφαπτομένη}$$

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

ή

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ με εστίες } E(0, \gamma)$$

και $E'(0, -\gamma)$ όπου $\gamma^2 = a^2 + b^2$

Κορυφές τα σημεία

$A(0, a), A(0, -a)$, εστιακή

απόσταση 2γ , εκκεντρότητα

$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$, ασύμπτωτες

$$y = \pm \frac{a}{b}x, \text{ εφαπτομένη}$$

$$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$$



Κύκλος

1875. Να βρεις το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων :

- $x^2 + y^2 = 4$
- $x^2 + (y-3)^2 = 16$
- $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

1876. Να εξετάσεις αν οι εξισώσεις παριστάνουν κύκλο :

- $x^2 + y^2 - 4x + 3y - 2 = 0$
- $3x^2 + 3y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$

$$K\left(2, -\frac{3}{2}\right), r = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ \& } K\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{6}$$

1877. Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

- $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
- $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 20 = 0$
- $3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 1 = 0$
- $x^2 + y^2 - 4\alpha x + 10\beta y + 4\alpha^2 + 16\beta^2 = 0$.

1878. Να εξετάσεις αν παριστάνει κύκλο η εξίσωση : $(2x-1)^2 + (2y+3)^2 = 8$

$$K\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), r = \sqrt{2}$$

1879. Να εξετάσεις αν παριστάνει κύκλο η εξίσωση : $4x^2 + 4y^2 - 12x + 12 = 0$

∅

1880. Να εξετάσεις αν παριστάνει κύκλο η εξίσωση : $(3x-1)^2 + (3y+3)^2 = 9$

$$K\left(\frac{1}{3}, -1\right), r = 1$$

1881. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 - ax + 9 = 0$, να βρεις

- Το α για να παριστάνει κύκλο
- Ποιος ο Γ.Τ. των κέντρων του κύκλου

$$a \in (-\infty, -6) \cup (6, +\infty), \text{ \& } x x'$$



1882. Να βρεις την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$.
- Όταν εφάπτεται της ευθείας $x - y = 2$

1883. Ν.δ.ο. παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων η εξίσωση :

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy = 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

$$K\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right)$$

1884. Να βρεις τον κύκλο που διέρχεται από αρχή αξόνων και έχει κέντρο $K(1, -3)$

$$\rho = \sqrt{10}$$

1885. Να βρεις κύκλο με διάμετρο AB , $A(3, 0), B(5, 4)$

$$\rho = \sqrt{5}$$

1886. Δίνεται εξίσωση : $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 1$, να βρεις

- Αν παριστάνει κύκλο
- Αν διέρχεται από το $A(2, -1)$
- Τον ομόκεντρό του κύκλο που διέρχεται από το A
- Το αντιδιαμετρικό σημείο του A του ομόκεντρου κύκλου

$$K\left(-1, \frac{3}{2}\right), r = \frac{\sqrt{17}}{2}, \emptyset, R = \frac{\sqrt{61}}{2}, A'(-4, 4)$$

1887. Να βρεις κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και να εφάπτεται σε ευθεία $3x - 4y + 7 = 0$

$$\rho = \frac{8}{5}$$

1888. Να βρεις το α ώστε να παριστάνει κύκλο η εξίσωση : $(3x - 2)^2 + (3y + 6)^2 = 2\alpha - 1$

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

1889. Δίνεται εξίσωση $x^2 + y^2 + (a - 1)x - 2ay - 4a + 1 = 0$

- Να βρεις το α ώστε να παριστάνει κύκλο
- Πότε ο κύκλος διέρχεται από αρχή αξόνων και
- να βρεις το γ.τ. των κέντρων των κύκλων .



$$a \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right), a = \frac{1}{4}, y = 2x + 1$$

1890. Να βρεις την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που έχει μέσο το σημείο $M(1, -1)$.

1891. Ποιος ο περιγεγραμμένος κύκλος των σημείων $A(1, 7), B(8, 6), C(7, 1)$

1892. Να βρεις τον περιγεγραμμένο κύκλο του $\triangle AB\Gamma$ με εξισώσεις πλευρών

$$y = 2x - 1, y = 2 - x, y = \frac{1}{3}x - 1$$

1893. Να βρεις τον κύκλο που διέρχεται από τα $A(4, 0), B(4, 4), C\left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2}\right)$

1894. Να βρεις τον κύκλο που διέρχεται από $A(1, 2)$ και τα κοινά σημεία των κύκλων :

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25, (x-3)^2 + (y+6)^2 = 80$$

1895. Να βρεις κύκλο που διέρχεται από $A(-2, 3), B(1, 1)$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία

$$y = x + 2$$

1896. Να βρεις τον κύκλο ακτίνας 4, ο οποίος διέρχεται από σημεία τομής της $3y - x = 6$ με τους άξονες

1897. Να βρεις τον κύκλο ακτίνας 1 που εφάπτεται της $3x - 4y = 2$ σε σημείο με τεταγμένη 1

1898. Να βρεις το κύκλο που έχει κέντρο το $K(1, 2)$ και αποκόπτει από την ευθεία $2x + 3y - 1 = 0$ τμήμα μήκους 1

$$\rho = \sqrt{\frac{209}{52}}$$



Σχετική θέση κύκλου

1899. Να βρεις τη σχετική θέση του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \text{ με τις ευθείες :}$$

- $2x - 3y - 5 = 0$
- $x + y - 12 = 0$
- $3x - 4y + 14 = 0$

τέμνονται, τίποτα, εφάπτονται

1900. Δίνονται ευθεία και κύκλος

$$2x - y + a - 2 = 0, x^2 + (y - 2)^2 = 5$$

- Να βρεις το a ώστε η ευθεία να εφάπτεται του κύκλου
- Ποιο το σημείο επαφής ;

$$\alpha = -1,9, A(-2,3)$$

1901. Να βρεις τις ευθείες που διέρχονται από το $(0,0)$ και τέμνουν τον κύκλο σε δύο σημεία ,

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{12 \pm \sqrt{88}}{14}$$

1902. Να βρεις τη σχετική θέση των κύκλων και τα κοινά τους σημεία αν υπάρχουν :

$$C_1 : x^2 + y^2 = 4, C_2 : x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0$$

$\emptyset$

1903. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 4.$$

1904. Να βρεις τα κοινά σημεία των κύκλων :

$$a \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \Rightarrow \emptyset, a = \pm 4 \Rightarrow \left(0, \frac{a}{2}\right), a \in (-4, 4) \Rightarrow \left(\pm \frac{\sqrt{16-a^2}}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

Σχετική θέση

Κύκλου με ευθεία

$$1^{\circ} : \text{Εφάπτονται: } d(K, \varepsilon) = \rho$$

$$2^{\circ} : \text{Τέμνονται : } d(K, \varepsilon) < \rho$$

$$3^{\circ} : \text{Κανένα κοινό σημείο : } d(K, \varepsilon) > \rho$$

Σχετική θέση κύκλων

Αρχικά υπολόγισε τη διάκεντρο δ (δ =απόσταση κέντρων) και σύγκρινέ τη με άθροισμα και διαφορά ακτίνων των κύκλων

$$1^{\circ} : \text{εφάπτονται εξωτερικά : } \delta = R + \rho$$

$$2^{\circ} : \text{εφάπτονται εσωτερικά : } \delta = R - \rho$$

$$3^{\circ} : \text{τέμνονται : } \delta < R + \rho$$

$$4^{\circ} : \text{κανένα κοινό σημείο και ο ένας μέσα στον άλλο : } \delta < R - \rho$$

$$5^{\circ} : \text{κανένα κοινό σημείο και ο ένας εκτός του άλλου : } \delta > R + \rho$$



Κύκλος εφάπτεται σε ...

1905. Να βρεις κύκλο που διέρχεται από $A(1,2)$ και

εφάπτεται στους άξονες

$$\rho = 1,5$$

1906. Να βρεις κύκλο που διέρχεται από $A(1,2)$ και

εφάπτεται σε ευθείες : $3x - 4y + 2 = 0, 4x - 3y + 5 = 0$

1907. Να βρεις κύκλο με κέντρο σε ευθεία $7x - 3y - 20 = 0$

και εφάπτεται σε άξονες

$$\rho = 2,5$$

1908. Να βρεις κύκλο που εφάπτεται σε άξονες και ευθεία $3x - 2y + 6 = 0$

1909. Να βρεις κύκλο που διέρχεται από $A(4,2)$ και εφάπτεται του xx' στο $B(3,0)$

$$\rho = \frac{5}{4}$$

1910. Να βρεις κύκλο που διέρχεται από $A(4,2)$ και εφάπτεται του yy' στο $B(0,3)$

1911. Να βρεις τις εξισώσεις των κύκλων που εφάπτονται σε άξονες και εσωτερικά σε κύκλο με

$$K(2, -2), R = 1$$

$$r = 3 \pm \sqrt{2}$$

1912. Να βρεις τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία $A(-3,2), B(1,-2)$ και εφάπτεται της ευθείας

$$y = 4 - 2x$$

1913. Να βρεις την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται σε άξονες και στην ευθεία $3x + 4y = 12$

1914. Να βρεις τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία $A(3,2), B(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας

$$y = 2x + 4$$

1915. Να βρεις την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται σε άξονες και στην ευθεία $x + y = 12$

$$r = \frac{12}{2 \pm \sqrt{2}}, r = \frac{12}{\sqrt{2}}, r = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

1916. Να βρεις κύκλο εγγεγραμμένο σε άξονες και ευθεία $3x - 2y + 6 = 0$

$$\rho = \frac{6}{5 + \sqrt{13}}$$

Κύκλος εφάπτεται

1^η : σε xx' :

$$K(x_o, y_o), \rho = |y_o|$$

2^η : σε yy' :

$$K(x_o, y_o), \rho = |x_o|$$

3^η : σε xx', yy' :

$$K(x_o, y_o), \rho = |x_o| = |y_o|$$



Συμμετρία κύκλου

1917. Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ ως προς το σημείο $A(5,5)$

$K'(12,9)$

1918. Ν.δ.ο. οι κύκλοι είναι συμμετρικοί ως προς τη διχοτόμο 1^{ου}, 3^{ου} τεταρτημορίου :

$$x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0, x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$$

1919. Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ ως προς την ευθεία $x + 2y - 3 = 0$

$K'\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$

1920. Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ ως προς την ευθεία $x + 2y - 3 = 0$

$K'\left(-\frac{4}{5}, \frac{17}{5}\right)$



Εφαπτόμενες κύκλου

1921. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 0$ στα σημεία του με τεταγμένη 2
1922. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 5$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, και να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
1923. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x \sin \varphi + y \eta \mu \varphi = 4 \eta \mu \varphi - 2 \sigma \upsilon \nu \varphi + 4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.
1924. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$, οι οποίες είναι $// \vec{a} = (2, -1)$
- $$\beta = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$
1925. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι $\perp 2x - y + 7 = 0$
- $$\beta = \pm \frac{5}{2}$$
1926. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που άγονται από το $A(-6, 0)$. Ποια η γωνία των εφαπτομένων
- $$\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$
1927. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$ οι οποίες είναι $// 2x - 3y + 1 = 0$
- $$\beta = -\frac{11}{3} \pm \sqrt{13}$$
1928. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ και $C_2 : x^2 + (y+1)^2 = 3^2$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο $A(5, -1)$.
 - Να αποδειχτεί ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2 .
1929. Να βρεις τις εφαπτόμενες του $x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες απέχουν από $A(3, -3)$ απόσταση 2
1930. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $4x^2 + 4y^2 - 8y + 3 = 0$, οι οποίες διέρχονται από $(0, 0)$. Ποια η γωνία των εφαπτομένων
1931. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που σχηματίζουν 45° με την ευθεία $2x - y + 5 = 0$
1932. Δίνεται κύκλος : $x^2 + y^2 = R^2$, να βρεις
- Ακτίνα, αν ο κύκλος διέρχεται από το $A(1, \sqrt{3})$
 - Την εφαπτόμενη του κύκλου που είναι κάθετη στην $x + y = 1$



1933. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ οι οποίες είναι $// 2x + 6y - 1 = 0$
1934. Να βρεις τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ οι οποίες είναι $\perp x - y + 1 = 0$
1935. Να βρεις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων : $x^2 + y^2 = 4, (x-6)^2 + y^2 = 9$
1936. Να βρεις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων : $x^2 + y^2 = 4, (x+6)^2 + y^2 = 1$
1937. Ν.δ.ο. οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά : $x^2 + y^2 = 4, (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.Να βρεις την κοινή τους εσωτερική εφαπτομένη

$$A\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$
1938. Να βρεις τη σχετική θέση των κύκλων : $x^2 + y^2 - 6y = 0, x^2 + y^2 - 6x = 0$. Ποιες οι κοινές εφαπτόμενες τους;

$$y = -x \pm 3\sqrt{2} + 3$$
1939. Ν.δ.ο. η ευθεία $4y - 3x + 10 = 0$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων :

$$x^2 + y^2 = 4, (x-11)^2 + (y-12)^2 = 25$$
1940. Να βρεις τη σχετική θέση των κύκλων καθώς και τις εξωτερικές εφαπτομένες τους :

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0, x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$
1941. Δίνονται οι εξισώσεις : $x^2 + y^2 - 2x + 10y = 24, x^2 + y^2 + 2x + 2y = 8$, να βρεις
- Αν παριστάνουν κύκλους
 - Τη σχετική τους θέση
 - Τα κοινά τους σημεία , αν υπάρχουν
1942. Δίνονται οι κύκλοι : $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 50, (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$, να βρεις
- Τη σχετική τους θέση
 - Κοινή χορδή , αν υπάρχει
1943. Να βρεις τους κύκλους με κέντρα στον xx' και εφάπτεται στην ευθεία $y = x$
1944. Να βρεις τον κύκλο που εφάπτεται σε $γγ'$ στο σημείο $A(0, -2)$ και αποκόπτει από την ευθεία $x + y + 1 = 0$ τμήμα 2 εκ.
1945. Να βρεις για τις διάφορες τιμές του a τι παριστάνει η εξίσωση : $x^2 + y^2 + ax - (a+1)y + \frac{5}{4}a = 0$
1946. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 2), B(2, 4)$, να βρεις το γ.τ. των σημείων M ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο στο M .



1947. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(-3,0), B(3,0)$ είναι σταθερός και ίσος με 2.
1948. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $x=1$.
1949. Να αποδείξετε ότι καθώς το θ διαγράφει το διάστημα $[0, 2\pi)$, το σημείο τομής των ευθειών $x \sin \theta + y \cos \theta = \alpha$, $x \cos \theta - y \sin \theta = \beta$ διαγράφει τον κύκλο $x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
1950. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$, που διέρχονται από το σημείο $A(2,4)$.
1951. Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία (ϵ) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.
- Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 8)
 - Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ϵ) είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)
 - Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) εφάπτεται στον κύκλο C . (Μονάδες 8)
1952. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία $\epsilon : 3x + 4y + 1 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$. (Μονάδες 10)
 - Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ϵ είναι $\frac{12}{5}$. (Μονάδες 10)
 - Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ϵ και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)
1953. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)
 - Να σχεδιάσετε τον κύκλο (C) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)
1954. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$. (Μονάδες 8)
- Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A . (Μονάδες 9)
 - Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 8)
1955. Τα σημεία $A(-8,1), B(4,5)$ και $\Gamma(-4,9)$ είναι σημεία ενός κύκλου C .
- Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 10)



1956. Δίνεται ο κύκλος $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ και η ευθεία $\epsilon : 3x - 4y = 8$.

• Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)

• Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ϵ είναι

$$d(K, \epsilon) = \frac{13}{5}. \quad (\text{Μονάδες 13})$$

• Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. (Μονάδες 10)

1957. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

• Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB . (Μονάδες 7)

• Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$. (Μονάδες 8)

• Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB . (Μονάδες 10)

1958. Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\epsilon) : 4x - 3y + 5 = 0$.

• Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ϵ) είναι ίση με 2. (Μονάδες 6)

• Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ϵ) . (Μονάδες 9)

• Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ϵ) . (Μον 10)

1959. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

• τον κύκλο C . (Μονάδες 9)

• τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

• τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

1960. Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

• Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)

Δίνεται το σημείο $A(3,-4)$.

• Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C . (Μονάδες 5)

• Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A . (Μονάδες 10)

1961.

Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)(x+3) + (y+1)(y-3) = -4$

• Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)



- Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 . (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

1962.

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(3,-3), B(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:

- την εξίσωση της πλευράς BΓ. (Μονάδες 10)
- την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά BΓ. (Μονάδες 15)

1963.

Δίνονται τα σημεία A(0,3), B(3,4) και Γ(1,0).

- Να αποδείξετε ότι η γωνία BAΓ είναι ορθή. (Μονάδες 13)
- Να βρείτε το μέσο K της υποτείνουσας BΓ του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ. (Μονάδες 7)

1964.

Δίνονται τα σημεία A(2,-4) και B(0,-2)

- Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB. (Μονάδες 4)
- α βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB. (Μονάδες 5)
- Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ε): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (Μον 9)
- Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. (Μονάδες 7)

1965.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1)

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)

- Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R). Μονάδες 8)

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A. (Μονάδες 8)

1966.

Θεωρούμε την ευθεία ε: $3x - 4y = 0$ και το σημείο A(-2,1).

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A. (Μον 10)
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε) στο σημείο A. (Μονάδες 7)

1967.

Δίνεται η εξίσωση $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

- Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(-1,1) και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)



- Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R) . (Μονάδες 7)
 - Η ευθεία $(\varepsilon): x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R) . (Μονάδες 9)
1968. Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 6)
 - Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 10)
 - Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)
1969. Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.
- Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C . (Μονάδες 6)
 - Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)
 - Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$. (Μονάδες 6)
1970. Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2).
- Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0), \Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3, \rho_2 = 1$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (KL) . (Μονάδες 5)
 - Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 . (Μονάδες 5)
 - Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 (Μον 9)
1971. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.
- Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0), \Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1, \rho_2 = 3$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)
 - Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 (Μονάδες 10)
 - Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. (Μονάδες 7)
1972. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:



$$C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \text{ και } C_2 : (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18.$$

- Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ,Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολουθώς να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (Μονάδες 7)
- α βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων (Μονάδες 8)

1973. Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος C_1 με εξίσωση

$$C_1 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

- Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x - 2$. (Μονάδες 7)
- Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$, ανήκουν σε κύκλο C_2 κέντρου $A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R = 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 6)
- Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους. (Μονάδες 6)
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 (Μον6)

1974. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)
- Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο ΑΒ έχει εξίσωση $C : x^2 + (y+1)^2 = 5$. (Μονάδες 6)
- Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1 : x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y + 7 = 0$. (Μονάδες 7)
- Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C . (Μονάδες 6)

1975. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

- Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 6)
- Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3,2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (Μονάδες 7)
- Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 12)

1976. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0$ (1) με $k \in \mathbb{R}$.



- Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου. (Μονάδες 3)
 - Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων. (Μονάδες 7)
 - Για $K = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$. (Μονάδες 8)
- 1977.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ (1), όπου $k \in (0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 10)
 - Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 7)
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$ (Μονάδες 8)
- 1978.** Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ και $C_2: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$.
- Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $\chi O \gamma$ του συστήματος συντεταγμένων. (Μονάδες 8)
 - Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 . (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ. (Μονάδες 10)
- 1979.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ . (Μονάδες 7)
 - Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$; (Μονάδες 3)
 - Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ . Αξιοποιώντας το σχήμα,
 - να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)
 - να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 5)
 - να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1). (Μονάδες 5)
- 1980.** Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.



- Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 3)
- Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (Μονάδες 10)
- Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (Μονάδες 7)
- Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$ (Μον5)

1981. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,5)$.

- Αν για το σημείο $M(x,y)$ ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:
- Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6y - 6x + 10 = 0$ (Μον 8)
- Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 3)
- ν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3,3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$:
- Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία $(\varepsilon) : \lambda x + y = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 7)
- Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την AB γωνία 45° ; (Μονάδες 7)

1982. Θεωρούμε τα σημεία $A(-1,2)$, $B(3,2)$, $\Gamma(1,4)$.

- Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 7)
- Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 1$.
- Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ που ισαπέχει από τα A, B (Μονάδες 7)
 - α βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ (Μονάδες 5)

1983.

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha, \beta > 0$.

- Να βρείτε συναρτήσει των α, β
- τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB . (Μονάδες 5)
- την απόσταση (OM) . (Μονάδες 5)
- Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:
- να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$. (Μονάδες 5)
- να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 3)



- Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ. (Μονάδες 7)
1984. Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y = 0$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε . (Μονάδες 6)
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε . (Μονάδες 7)
- Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)
- Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
1985. Δίνεται η εξίσωση $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$ (1).
- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. (Μονάδες 6)
- Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.
- Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)
- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB . (Μονάδες 9)
- Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$. (Μονάδες 6)
1986. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.
- Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C . (Μονάδες 5)
- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 6)
- Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$. (Μονάδες 8)
1987. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 1$.
- Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:
- Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° . (Μονάδες 6)



- Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)
- Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία A' και B . (Μονάδες 6)
- 1988. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)

Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

 - Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$. (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 4)
 - Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB . (Μονάδες 9)
- 1989. Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K . Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M . Να βρείτε:
 - Τις συντεταγμένες του σημείου M . (Μονάδες 4)
 - Την εξίσωση της ευθείας KM . (Μονάδες 8)

Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x + y = -12$, τότε:

 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K . (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 6)
- 1990. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)
 - Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda = 0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μον 5)
- 1991. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4ay = 0$ (1) όπου a είναι πραγματικός αριθμός.
 - Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
 - Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του a . (Μονάδες 6)



- Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)
- Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

1992. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB , για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB , για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)
- Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

1993. Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda - 1, 2\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 . (Μονάδες 10)
- Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)
- Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 . (Μονάδες 6)

1994. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ϵ) με

εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

- Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) . (Μονάδες 5)
- Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ϵ) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)
- Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) Μονάδες 5
- **β)** Αν είναι $A(1, 2)$ και $B(4, -2)$, τότε:



- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. (Μονάδες 5)

- Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O. (Μονάδες 6)

1995. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|.$$

- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

- Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 8)
- Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD}$. (Μονάδες 7)

1996. Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της BΓ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 8)

Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $BA\Gamma = 90^\circ$.

- Να υπολογίσετε το λ . (Μονάδες 8)
- Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 9)

1997. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

- Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού; (Μονάδες 4)
- Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 5)
- Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 8)
- Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 8)

1998. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)



- Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

- Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 9)

1999. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (2) αντίστοιχα.

- Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 12)
- Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (Μονάδες 8)
- Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N . (Μονάδες 5)

2000. Οι κορυφές A, Γ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$. (Μονάδες 8)
- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B, Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

2001. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και

- Ακτίνα $\rho = 3$
- Διέρχεται από το σημείο $B(-12, 5)$
- Εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): 3x - 4y + 10 = 0$

2002. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και

- Ακτίνα $\rho = 4$
- Διέρχεται από το σημείο $A(3, -4)$
- Εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): 5x - 12y + 39 = 0$

2003. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(6, 3)$ και $B(-2, -1)$.

2004. 7) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος :

- Έχει κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα 4
- Έχει κέντρο $K(-8, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$



- Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-6, 14)$ και $B(2, 8)$
- Έχει κέντρο $K(3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 6 = 0$
- Διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ και εφάπτεται στον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 2)$
- 2005. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, 1)$, ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y + 8 = 0$.
- 2006. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα $A(2, 3)$, $B(2, 5)$ και έχει ακτίνα $\sqrt{5}$
- 2007. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $2x + 2y - 3 = 0$.
- 2008. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y - 1 = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στις ε_1 , ε_2 και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $x = 1$.
- 2009. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία $A(-2, 1)$, $N(1, 0)$, $P(1, 4)$
- 2010. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - Όταν έχει κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα $\rho = 5$
 - Όταν έχει κέντρο $K(1, -2)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 4)$.
- 2011. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - Όταν τέμνει τον $y'y$ στα σημεία $A(0, 1)$ και $B(0, 3)$ και τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\Gamma(2, 0)$ και $\Delta(1, 0)$.
 - Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(0, -2)$.
- 2012. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + 2y - \mu = 0$. Να βρείτε το μ ώστε η (ε) να είναι διάμετρος του κύκλου.
- 2013. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση:
 - $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$
 - $x(x - 1) + (y + 1)(y - 3) = 0$
 - $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$
 - $2x^2 + 2y^2 - 4x + 1 = 0$
 - $(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 4$
- 2014. Να βρείτε τον κύκλο C που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$ και εφάπτεται της ευθείας $4x + 3y - 1 = 0$.
- 2015. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν :
 - εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(-5, 0)$.
 - διέρχεται από το $B(-1, -8)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4y - 4 = 0$ στο $A(0, -1)$
- 2016. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν :



- διέρχεται από τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(-1, 4)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): 4x - 5y + 11 = 0$
- όταν εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, 3)$
- 2017. Δίνεται ο κύκλος $(C): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ και τα σημεία $A(-6, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 5)$.
Να βρείτε :
 - Το κέντρο και την ακτίνα του
 - Τη σχετική θέση των σημείων A , B και Γ ως προς τον C .
- 2018. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$. Να βρείτε τη σχετική θέση των παρακάτω ευθειών με τον κύκλο C :
 - $\varepsilon_1: 3x - 4y + 3 = 0$
 - $\varepsilon_2: 3x - 4y + 1 = 0$
 - $\varepsilon_3: 3x - 4y + 2 = 0$
- 2019. Να βρείτε τη σχετική θέση των παρακάτω κύκλων:
 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ $C_2: (x - a)^2 + (y + 1)^2 = a^2$ όταν:
 - $a = \sqrt{2}$
 - $a = \sqrt{5} - 1$
 - $a = 1 + \sqrt{5}$
 - $a = 4$
 - $a = 1$
- 2020. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$, $C_2: x^2 + y^2 + 3x + 4y + \lambda = 0$ και $C_3: x^2 + y^2 - x - y + \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:
 - οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.
 - οι κύκλοι C_1, C_3 εφάπτονται εσωτερικά.
- 2021. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ και το σημείο του $A(2, 1)$. Να γραφεί η εξίσωση κύκλου C_1 ο οποίος εφάπτεται του C στο A εξωτερικά και έχει ακτίνα διπλάσια του C .
- 2022. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 = 25$ να βρείτε :
 - Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του $A(-4, 3)$
 - Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): 4x - 3y + 2012 = 0$
 - Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(5, 10)$.
- 2023. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$, η οποία είναι:
 - Παράλληλη στην $\eta: x + 3y = 4$
 - Κάθετη στην $\zeta: 3x + y = 2$.



2024. Να βρεθούν οι εφαπτομένες του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = 100$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(10, 20)$.
2025. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 120° .
2026. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 7)$, και να αποδειχτεί ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.
2027. Δίνεται ο κύκλος (C): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C στα σημεία του : α) $A(3, -1)$ β) $B(4, 2)$ γ) $\Gamma(-1, 7)$
2028. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του C στο σημείο του $A(-1, 5)$.
 - Να δείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται και στον κύκλο $(C_2): x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$.
2029. Δίνεται κύκλος (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) που είναι κάθετες στην ευθεία (ζ): $3x - 6y - 2013 = 0$.
2030. Δίνεται κύκλος (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) που είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $y = x + 1$.
2031. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 18 = 0$ και το σημείο του $A(3, 3)$. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης του C στο A.
2032. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$ και το σημείο (εκτός αυτού) $A(3, -5)$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που διέρχεται από το A προς τον κύκλο.
2033. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 8$, που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσον με 8.
2034. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ και το σημείο $A(3, 0)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο A και την οξεία γωνία που σχηματίζουν αυτές.
2035. Να βρεθεί το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος από το σημείο $A(6, 4)$ προς τον κύκλο (C): $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$.
2036. Από το σημείο $P(-4, -5)$ φέρνουμε την εφαπτομένη PA προς τον κύκλο (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος PA.
2037. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο $A(3, 4)$. Από το A φέρουμε τις εφαπτόμενες προς αυτόν και έστω Λ και Μ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η ΛΜ έχει εξίσωση (ΛM): $3x + 4y = 10$.
2038. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου (C): $(x - 2)^2 + y^2 = 5$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(3, -3)$ είναι μεταξύ τους κάθετες.
2039. Δίνεται ο κύκλος (C): $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ και το σημείο $A(-1, 0)$.
- Να δείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που διέρχεται από το A προς τον κύκλο.
2040. Δίνεται ο κύκλος (C): $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$ και το σημείο $P(9, 8)$.



- Να δείξετε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που διέρχεται από το P προς τον κύκλο.
2041. Έστω ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 3$ και η ευθεία ε: $x + y + 4 = 0$.
- Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
 - Από ένα σημείο M της ε φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στον κύκλο C όπου A, B τα σημεία επαφής. Αν το σημείο M κινείται στην ευθεία ε, να δείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.
2042. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = 9$, η οποία έχει μέσο το σημείο $M(2, 1)$.
2043. Να βρεθεί το μήκος της χορδής του κύκλου (C): $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 9 = 0$ η οποία έχει μέσο το σημείο $M(2, 1)$.
2044. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων $(C_1): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ και $(C_2): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
2045. Από το σημείο $P(3, 5)$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB προς τον κύκλο (C): $x^2 + y^2 = 2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB.
2046. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$ και η ευθεία ε: $y = x + 4$.
- Να δείξετε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής που ορίζουν ο κύκλος με την ευθεία.
2047. Να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 25$ από την ευθεία ε: $y = \sqrt{3}x + 8$.
2048. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $O(0, 0)$ και κόβει από την ευθεία ε: $3x + 4y - 15 = 0$ χορδή με μήκος 8.
2049. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 25$:
- Όταν το σημείο $M(1, 2)$ είναι μέσο της.
 - Όταν διέρχεται από το σημείο $(-1, 3)$ και έχει μήκος ίσο με 8.
2050. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (2 - \lambda)x - 2y + 2 - \lambda = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από σταθερό σημείο.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε ο κύκλος (1) να εφάπτεται στην ευθεία (ε): $4x + 3y - 2 = 0$.
2051. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.



- Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε ο κύκλος (1) να έχει ακτίνα ίση με 4.
 - 2052. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8\lambda = 0$ παριστάνει κύκλο.
 - 2053. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda + 10)y + 5\lambda + 15 = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από δυο σταθερά σημεία.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε το κέντρο του παραπάνω κύκλου να ανήκει στην ευθεία (ε): $3x - y + 15 = 0$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος που ορίζεται από την (1) έχει ακτίνα ίση με 5.
 - 2054. Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \lambda(x - 1) = 0$ (1).
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
 - Για τις παραπάνω τιμές του λ να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από σταθερό σημείο.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε ο κύκλος (1) να εφάπτεται στην ευθεία (ε): $4x + 3y - 2 = 0$.
 - 2055. Δίνεται η ευθεία (ε): $2x - y - 3 = 0$ και ο κύκλος (C): $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.
 - Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) και ο κύκλος (C) τέμνονται σε δυο σημεία M, N.
 - Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 - x + y - 2 + \lambda(2x - y - 3) = 0$ (1). Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία M, N.
 - Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
 - 2056. Δίνεται η οικογένεια των κύκλων $C_\lambda: x^2 + y^2 - 5 = 2\lambda(x - 1)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
 - Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων C_λ .
 - 2057. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0$ (1) $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
 - Να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε η ακτίνα του παραπάνω κύκλου να είναι ίση με 2.
 - Να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση (ε): $5x + 3y + 1 = 0$.
 - Να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- (Θέμα Πανελληνίων)
2058. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x \sin \theta - 2y \eta \mu \theta - 1 = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
 - Να δείξετε ότι για κάθε θ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.



- Αν $\theta = \pi/2$ να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο $M(1, 2)$.
 - Να δείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ , τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
2059. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (2 - \lambda)y + \lambda + 7 = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου.
 - Έστω ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο (C) του οποίου το κέντρο απέχει από την ευθεία (ε): $3x + 4y + 5 = 0$ απόσταση ίση με $\frac{2}{5}$. Να βρείτε τον αριθμό λ .
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C_1) που είναι ομόκεντρος με τον (C) και διέρχεται από το σημείο $A(-5, 2)$.
2060. Ευθεία ε περνάει από την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών M του $A(3, 4)$ στην ε .
2061. Έστω οι ευθείες $\varepsilon: x \eta \mu \theta + y \sigma \nu \theta = \sigma \nu \theta$ και $\eta: x \sigma \nu \theta - y \eta \mu \theta = \eta \mu \theta$. Να δείξετε ότι:
- οι ευθείες ε και η τέμνονται.
 - το σημείο τομής M_θ των ε και η ανήκει σε κύκλο.
 - αν μία ευθεία ζ τέμνει τις ε και η στα A και B , τότε $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
2062. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 169$ που διέρχονται από το σημείο $A(-4, 2)$.
2063. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
2064. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(0, 3)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε:
- $\vec{MA} \perp \vec{MB}$
 - $\angle AMB = 90^\circ$
2065. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + 6x = 0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων M των κύκλων που έχουν ακτίνα $\rho = 2$ και εφάπτονται του κύκλου C .
- εξωτερικά
 - εσωτερικά
2066. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$ είναι σταθερός και ίσος με 2.
2067. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, 5)$, $B(2, -4)$ και $\Gamma(-5, -1)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει: $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = 107$
2068. Να αποδειχτεί ότι το σημείο $M(1 + \eta \mu \varphi, 2 - \sigma \nu \varphi)$, όταν το φ μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$, κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.



2069. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, -2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $(MA)^2 + (MB)^2 = 2$.
2070. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, -2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $\angle AMB = 90^\circ$.
2071. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $(C): x^2 + y^2 = 25$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(2, 4)$.
2072. Έστω 2 σημεία $A(6, 2)$ και $B(3, -1)$ και ένα τυχαίο σημείο M για το οποίο ισχύει $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 1$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M .
2073. Δίνεται ο κύκλος $(C): (x - 1)^2 + y^2 = 4$ με κέντρο K και A είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε $\vec{MA} = 3\vec{KA}$.
2074. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $A(0, 1)$ είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{3}{2}$.
2075. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 4$ είναι κάθετες.
2076. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 - 4x = 0$ και το σημείο $A(3, 1)$.
- Να δείξετε ότι το σημείο A είναι εσωτερικό του κύκλου.
 - Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A .
2077. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 0)$. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων M , για τα οποία:
- $|\vec{MA}|^2 + |\vec{MB}|^2 = 10$
 - $22|\vec{MA}|^2 + 3|\vec{MB}|^2 = 15$
2078. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, y + 2)$ και $\vec{\beta} = (2 - y, x - 1)$. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων $M(x, y)$, αν:
- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$
 - $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$
2079. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(5\sin\theta, 5\eta\mu\theta)$.
2080. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 4)$.
2081. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$. Να βρείτε :
- Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C)
 - Τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δυο σημεία του κύκλου (C)
 - Τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από ένα σημείο του (C)
 - Τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σημείου $A(1, 2)$ από ένα σημείο του (C)



2082. Δίνεται ο κύκλος : $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ και τα σημεία $A(-7, 9)$ και $B(9, -3)$. Να βρείτε :

- Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C)
- Το εμβαδόν του τριγώνου KAB
- Την εξίσωση της ευθείας AB
- Τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση που έχει ένα σημείο της ευθείας AB από ένα σημείο του (C)

2083. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

2084. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ (1). Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο C και το κέντρο του να ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x - y + \lambda^2 = 0$. Μετά να βρείτε τα σημεία του C που απέχουν μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το O .



Παραβολή

2085. Να βρεις την εστία και τη διευθετούσα των παραβολών :

- $y^2 = -4x$
- $x^2 + 8y = 0$
- $2y^2 - 5x = 0$
- $3x^2 + \frac{1}{2}y = 0$

2086. Να βρεις την παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και συμμετρία στον xx' και να διέρχεται από το $A(-1, 3)$

2087. Παραβολή έχει κορυφή στην αρχή των αξόνων και συμμετρία στον οριζόντιο άξονα, να βρεις

- Αυτή που διέρχεται από $A(3, 4)$
- Αυτή που έχει εστία $E(-2, 0)$
- Αυτή που έχει $\delta: x = -3$

2088. Να βρεις την εξίσωση της παραβολής με εστία $E(-3, 2)$, $\delta: y = x$

2089. Να βρεις την παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον οριζόντιο και να διέρχεται από το βαρύκεντρο του τριγώνου με κορυφές τα $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(0, 4)$

2090. Δίνονται οι εξισώσεις : $y = ax^2$, $y = x$

- Ν.δ.ο. τέμνονται πάντα σε δύο σημεία
- Να βρεις το a ώστε η απόσταση των κοινών τους σημείων να είναι $\sqrt{2}$

2091. Δίνονται οι εξισώσεις : $y^2 = 4x$, $(x-4)^2 + y^2 = 13$

- Ν.δ.ο. τέμνονται σε 4 σημεία
- Να βρεις το εμβαδόν του τετραπλεύρου που δημιουργούν τα κοινά σημεία

2092. Έστω παραβολή $y^2 = ax$, $M(x_o, y_o)$ τυχαίο σημείο της

- Να βρεις την απόσταση του M από την εστία
- Ν.δ.ο. η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο σημείο προς την εστία της

2093. Δίνονται οι παραβολές : $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$

- Να βρεις τα κοινά τους σημεία

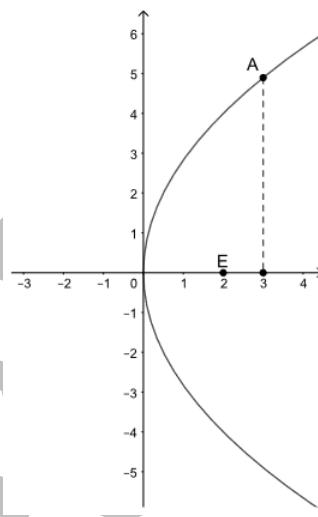


- Να βρεις τον κύκλο με διάμετρο τα κοινά τους σημεία
- 2094. Δίνονται οι εξισώσεις : $y = -x, y^2 = 2ax$
 - Να βρεις τα κοινά τους σημεία
 - Να βρεις την απόσταση των κοινών τους σημείων
- 2095. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, να βρεις τα σημεία της Α,Β όπου $AB \parallel xx', AOB = 90$
- 2096. Έστω Μ τυχαίο σημείο της $y^2 = 4x$, ν.δ.ο. ο κύκλος με διάμετρο το ΕΜ εφάπτεται του κατακόρυφου άξονα
- 2097. Παραβολή έχει $E(2,1), \delta: x - y + 3 = 0$, να βρεις
 - Εξίσωση παραβολής
 - Κορυφή της παραβολής
- 2098. Να βρεις την εφαπτόμενη της παραβολής $y^2 = 4x, // y = 2x$
- 2099. Δίνονται οι εξισώσεις : $y^2 = 12x, (x-3)^2 + y^2 = 36$, ν.δ.ο.
 - Εφάπτονται σε δύο σημεία
 - Να βρεις εφαπτόμενες της παραβολής σ αυτά τα σημεία
 - Οι εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο του κύκλου
- 2100. Να βρεις τις εφαπτόμενες της παραβολής $x^2 = 2y$, οι οποίες διέρχονται από το $A(0, -1)$
- 2101. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, Ε η εστία της, Μ τυχαίο της σημείο, η εφαπτόμενη στο Μ τέμνει κατακόρυφο άξονα στο Α και τη διευθετούσα στο Β. Ν.δ.ο. $EA^2 = AM \cdot AB$
- 2102. Να βρεις κοινή εφαπτόμενη των παραβολών : $x^2 = 4y, y^2 = 4x$
- 2103. Να βρεις την χορδή της $y^2 = 8x$ που έχει μέσο το $A(3, 2)$
- 2104. Να βρεις την παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρία τον οριζόντιο άξονα, και εφάπτεται της $4x - y + 1 = 0$
- 2105. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C. (Μονάδες 8)
 - Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4). (Μονάδες 8)
 - Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε). (Μονάδες 9)
- 2106. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.
 - Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)



- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

2107. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .



- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$. (Μονάδες 10)

- Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. (Μονάδες 6)
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο A . (Μονάδες 9)

2108. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

- Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0,3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)
- Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6,3)$ και $B(-6,3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 5)

2109. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1)

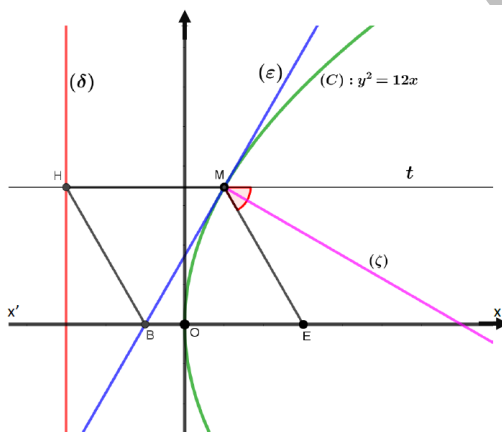
- Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)
- Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,-1)$ είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1,-1)$. (Μονάδες 8)

2110. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
- «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E , έχει συντεταγμένες $E(\dots, \dots)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση». (Μονάδες 9)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(1,-2)$. (Μονάδες 8)



- Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 8)
- 2111. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ϵ) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει τη διευθετούσα (δ) στο σημείο H .
 - Να αποδείξετε ότι η (ϵ) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E . (Μονάδες 6)
 - Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία EMt . (Μονάδες 6)



- 2112. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.
 - Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 9)
 - Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB . (Μονάδες 8)
 - Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- 2113. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία ϵ του επιπέδου με εξίσωση

$$\epsilon : \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

- Να δείξετε ότι η ευθεία ϵ δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ϵ . (Μονάδες 7)
- Αν η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 5)



- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ζ της παραβολής με ζ παράλληλη στην ε. (Μονάδες 8)
- Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε; (Μονάδες 5)

2114. Δίνεται η παραβολή C: $x^2 = 4y$ και η ευθεία ε: $y = x - 2$.

- Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε. (Μονάδες 8)

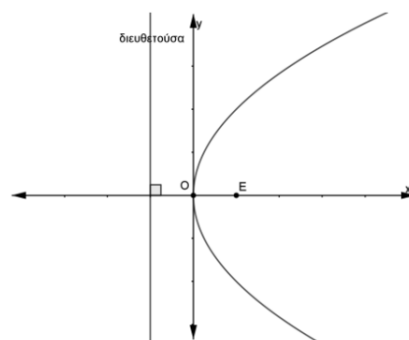
Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ε είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$ (Μον 6)
- Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

2115. Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ. (Μονάδες 12)
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

2116. Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον x'x. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



- Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2, 0)$, η διευθετούσα της είναι η δ: $x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$. (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2, 4)$ είναι η ε: $y = x + 2$. (Μονάδες 9)
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της $A(2, 4)$. (Μονάδες 7)

2117. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 8x$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45° .



- 2118.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής:
- $y^2 = 6x$ που διέρχεται από το $M(0,1)$
 - $x^2 = 4y$ στο σημείο με τετμημένη 2
 - $y^2 = 4x$ στο $A(1,-2)$ και την απόστασή της από την εστία.
- 2119.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής (C) : $y = \frac{1}{4}x^2$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$.
- 2120.** Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ εφάπτεται στην παραβολή (C') : $y^2 = 4x$. (Δηλαδή, έχουν τις ίδιες εφαπτομένες στα κοινά σημεία τους) (13)
- 2121.** Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες της παραβολής (C) : $x^2 = 4y$ στα σημεία της $A(4,4)$ και $B(-1, -\frac{1}{4})$ τέμνονται κάθετα σε σημείο που ανήκει στη διευθετούσα της. (13)
- 2122.** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:
- την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής
 - τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $y = x - 1$.
- 2123.** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ και το σημείο $A(a, 2a)$.
- Να δείξετε ότι το A ανήκει στην παραβολή.
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της στο A.
 - Να βρείτε το α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες να ισούται με $\frac{3a}{2} - 1$.
- 2124.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής $y^2 = 8x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έχουν κοινά σημεία οι δύο κωνικές τομές;
- 2125.** Έστω η παραβολή C: $y^2 = 4x$ και η ευθεία ε: $y = x - 1$.
- Να δείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από την εστία της παραβολής.
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της ευθείας ε και της παραβολής C.
 - Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.



Έλλειψη

2126. Να σχεδιάσεις τις ελλείψεις
- $x^2 + 4y^2 = 4$
 - $25x^2 + 9y^2 = 225$
 - $25x^2 + 9y^2 = 1$
2127. Να βρεις την εξίσωση της έλλειψης με μεγάλο άξονα 8, $E(2, 0)$
2128. Να βρεις την εξίσωση της έλλειψης με $E(2, 0)$, που διέρχεται από $A(1, 1)$
2129. Να βρεις μήκη αξόνων, εστίες, εκκεντρότητα της $9x^2 + 16y^2 = 144$
2130. Να βρεις την εξίσωση της έλλειψης με κορυφή $A(5, 0)$ και μικρό άξονα μήκους 6
2131. Να βρεις την εξίσωση της έλλειψης με $E(0, 1)$, $e = \frac{2}{3}$
2132. Να βρεις την εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο άξονα διπλάσιο από τον μικρό και διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$
2133. Να βρεις τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, που απέχουν από μεγάλο άξονα απόσταση 2
2134. Να βρεις το εμβαδόν τετραγώνου που εγγράφεται στην $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
2135. Να βρεις τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$, όπου $EME' = 90$
2136. Να βρεις τη χορδή της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ που έχει μέσο το $A(2, 1)$
2137. Να βρεις το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από το σημείο $A(-4, 0)$ και την ευθεία $4x + 25 = 0$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$
2138. Να βρεις το Γ.Τ. των σημείων $M(2\sigma\nu\nu\alpha, 3\eta\mu\alpha)$
2139. Να εγγράψεις τετράγωνο με πλευρές παράλληλες στους άξονες στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$
2140. Αν E, E' οι εστίες και B, B' κορυφές του μικρού άξονα της $x^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow EBB'E'$ είναι τετράγωνο



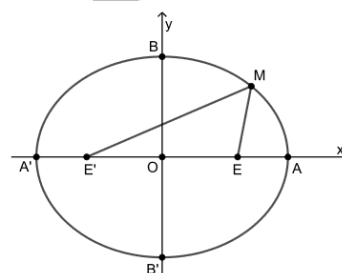
2141. Να βρεις την εφαπτόμενη της $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι $// 2x - y + 1 = 0$
2142. Να βρεις την εφαπτόμενη της $5x^2 + 9y^2 = 45$ που διέρχεται από το $M(3,5)$
2143. Ποια η εφαπτόμενη της έλλειψης $9x^2 + 4y^2 = 36$, η οποία ορίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 6
2144. Να βρεις τη χορδή της $4x^2 + 9y^2 = 36$ με μέσο το $A(2,1)$
2145. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$.
- Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' . (Μονάδες 12)
 - Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (Μον 13)
2146. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 9)
 - Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 8)
 - Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$. (Μονάδες 8)
2147. Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε:
- Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)
 - Την εστία E της παραβολής. (Μονάδες 5)
 - Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O , αν η μια εστία της είναι το σημείο $E(1,0)$ και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)
2148. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1)
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' . (Μονάδες 10)
 - Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 5)
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0,9)$. (Μονάδες 10)
2149. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).
- Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση:
 - «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της E και E' , έχουν συντεταγμένες $E(\dots, \dots)$ και $E'(\dots, \dots)$. Το



μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με».

(Μονάδες 15)

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της $B(0,-2)$.



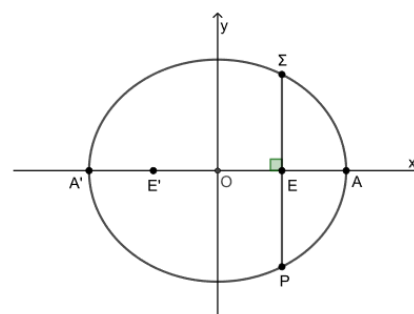
(Μονάδες 10)

2150. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$, $A(5,0)$, $B'(0,-4)$ και $B(0,4)$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$. (Μονάδες 10)
- Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$. (Μονάδες 10)
- Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (Μονάδες 5)

2151. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

- Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$



(Μονάδες 12)

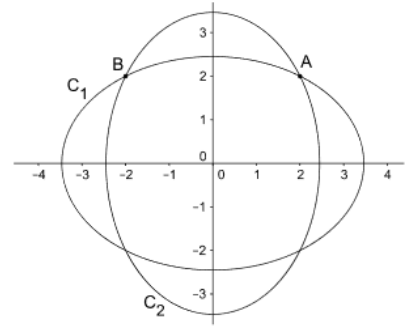
Έστω και τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τεταγμένη με την εστία $E(2,0)$. Επίσης το S έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική τεταγμένη.

- Να αποδείξετε ότι $S(2,3)$ και $P(2,-3)$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το μήκος του τμήματος SP . (Μονάδες 5)



2152. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις. (Μονάδες 10)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο B είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες ϵ_1, ϵ_2 είναι κάθετες.



(Μονάδες 10)

(Μονάδες 5)

2153. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1). Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες:

- Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Των εστίων E και E' της έλλειψης. (Μονάδες 12)
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$ και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

2154. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει :

- όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μικρό άξονα 6
- όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-2)$ και $E(0,2)$ και μεγάλο άξονα 12

2155. Να βρείτε τα μήκη αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων :

- $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$
- $12x^2 + 3y^2 = 36$

2156. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων $M(x,y)$ των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ είναι 10.

2157. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $E(0,3)$ και $E'(0,-3)$ είναι 8.

2158. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με μεγάλο άξονα στον $x'x$ αν δίνονται:

- $\alpha = 2\beta, E(2\sqrt{5}, 0), E'(-2\sqrt{5}, 0)$
- $\alpha = 2\beta$, και το σημείο της $M(6,4)$.
- $E(3,0), E'(-3,0)$ και η κορυφή $B(0,4)$.
- τα σημεία $K(3,2)$ και $\Lambda(4, \frac{4\sqrt{2}}{3})$
- $2\alpha = 10, 2\gamma = 8$



- η εστία $E(2,0)$ και η κορυφή $A(5,0)$.

2159. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

- $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$
- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$
- $16x^2 + 25y^2 = 1$

2160. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με μεγάλο άξονα $A'A$ τα σημεία που ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$ τέμνει τον x' και μία εστία, την εστία της παραβολής $y^2 = 6x$.

2161. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται σε επίπεδο έτσι ώστε η απόστασή του από την ευθεία $y = 8$ είναι διπλάσια της απόστασής του από το σημείο $A(0,2)$. Να βρείτε τον γ.τ. του M .

2162. Αν οι ελλείψεις $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ και $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{112} = 1$ είναι όμοιες, να δείξετε ότι $a = 16$.

2163. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εκκεντρότητα $e = \frac{1}{2}$ και κορυφή A την εστία της παραβολής.

2164. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στα σημεία $K(-1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$, $M(0,2)$.

2165. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 3y^2 = 3$ που είναι:

- παράλληλες στην $\eta: x + 3y + 1 = 0$.
- κάθετες στην $\zeta: x + y + 2 = 0$.
- διέρχονται από το $M(4,-6)$.

2166. Δίνονται οι κωνικές τομές $y^2 = 8x$ και $4x^2 + 2y^2 = 48$.

- Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών K και Λ .
- Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο K είναι κάθετες.



Υπερβολή

2167. Να βρεις την εξίσωση της υπερβολής με κορυφή την $A(3,0)$ και εστιακή απόσταση 10

2168. Να βρεις την εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από $M(3,4)$ και $EME' = 90$

2169. Ν.δ.ο. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1$, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες

2170. Αν υπερβολή με κορυφή την $A(0,3)$ και εστιακή απόσταση 10 , να βρεις

- Εξίσωση υπερβολής
- Ασύμπτωτες
- Απόσταση σημείων των ασύμπτωτων με τετμημένη 3

2171. Ποια η εξίσωση της υπερβολής με ασύμπτωτη την $y = \frac{1}{2}x$ και διέρχεται από $M(10,-4)$

2172. Να βρεις την ισοσκελή υπερβολή με τις ίδιες εστίες με την $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2173. Ν.δ.ο. η απόσταση κάθε εστία της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες είναι β

2174. Να βρεις τις εφαπτόμενες της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 1$, οι οποίες απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $\frac{1}{4}$

2175. Για κάθε τυχαίο σημείο M ισοσκελούς υπερβολής ν.δ.ο. $OM^2 = E'M \cdot EM$



2176. Δίνεται η υπερβολή (C) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E. (Μονάδες 10)
- Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$. (Μονάδες 5)
- Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

2177. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C) : $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και

εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

2178. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και

A' είναι 8.

- Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)
- Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 5)
- Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $\left(5, \frac{9}{4}\right)$. (Μονάδες 10)

2179. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1)

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) της υπερβολής. (Μονάδες 10)
- Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

2180. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1). Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή

σας:

- Τις συντεταγμένες των εστιών της.
- Την εκκεντρότητά της.
- Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 10)

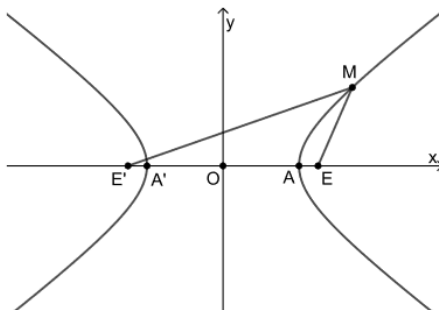
2181. Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία E'(-10,0) και E(10,0) και κορυφές τα σημεία A'(-8,0) και A(8,0).

- Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. (Μονάδες 12)



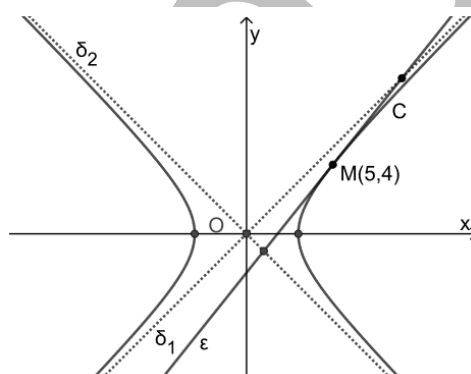
Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

- Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$. (Μονάδες 8)
- Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' . (Μονάδες 5)



2182. Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ϵ είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5,4)$. Να αποδείξετε ότι:

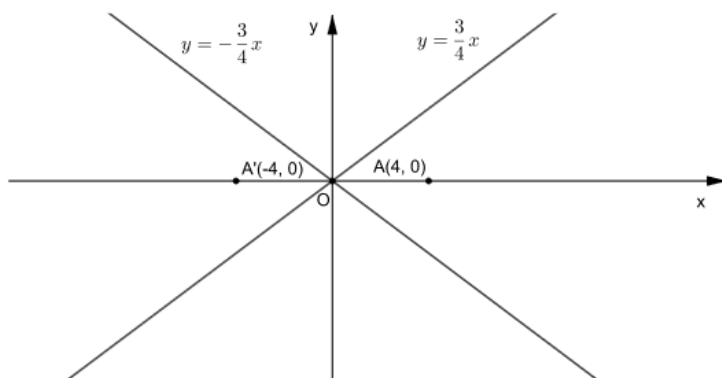
- Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι $\delta_1 : y = x$ και $\delta_2 : y = -x$. (Μονάδες 8)
- Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\epsilon : 5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ϵ και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ϵ και δ_2 . (Μονάδες 9)



2183. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4,0)$

και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$. Να αποδείξετε ότι:

- $\alpha = 4$ και $\beta = 3$ (Μονάδες 10)
- οι εστίες της είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$ (Μονάδες 10)
- Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C . (Μον 5)



2184. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

- Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

(Μονάδες 9)

Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

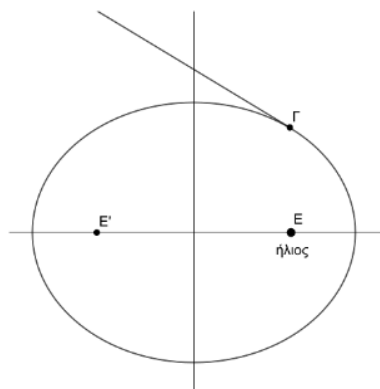
- Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα $O\gamma$. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$.

(Μονάδες 9)

- Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 7)



2185. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει :

- όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$ και απόσταση κορυφών 8
- όταν έχει εστίες : $E'(-2\sqrt{5}, 0)$, $E(2\sqrt{5}, 0)$ και εκκεντρότητα : $\varepsilon = \sqrt{5}$.

2186. Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες των υπερβολών:

- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- $9x^2 - 4y^2 = 36$

2187. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον $x'x$ αν έχει:



- $\gamma = 5, \beta = 4$
 - $\alpha = 4$ και διέρχεται από το $M(5,3)$.
 - κορυφές $A(6,0)$, $A'(-6,0)$ και $\varepsilon = \frac{4}{3}$.
2188. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον $\gamma'\gamma$ αν έχει:
- $\gamma = 5, \beta = 4$
 - $\gamma = 10, \varepsilon = \frac{5}{3}$
2189. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον $\chi'\chi$ αν έχει:
- εστιακή απόσταση 6 και εκκεντρότητα $\frac{3}{2}$.
 - εστιακή απόσταση 20 και ασύμπτωτη την $y = \frac{4}{3}x$.
2190. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον $\chi'\chi$ αν έχει:
- κάθετες ασύμπτωτες και $\gamma = \sqrt{2}$.
 - εστιακή απόσταση 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.
 - $\varepsilon = \sqrt{2}$ και διέρχεται από το $M(5,4)$.
2191. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον $\gamma'\gamma$ αν έχει κάθετες ασύμπτωτες και $\gamma = \sqrt{5}$.
2192. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, της οποίας η ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον $\chi'\chi$ γωνία 30° .
2193. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον $\chi'\chi$ αν έχει εστιακή απόσταση 20 και ασύμπτωτη την $y = \frac{4}{3}x$.
2194. Οι υπερβολές $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ έχουν:
- ίδιες ασύμπτωτες Σ ή Λ ;
 - ίδια εκκεντρότητα Σ ή Λ ;
2195. Να βρείτε την εστιακή απόσταση της υπερβολής $3x^2 - 13y^2 = 39$
2196. Να βρείτε τις εστίες και την εστιακή απόσταση της υπερβολής $3y^2 - 13x^2 = 39$
2197. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και η μία κορυφή της είναι το $A(\sqrt{5}, 0)$.
2198. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$ και κορυφές A και A' με $|AA'| = 4$.
2199. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{4}$.
2200. Να βρείτε την γωνία των ασύμπτωτων μιας υπερβολής αν $\beta = \sqrt{3}$ και $\gamma = 2\alpha$.



2201. Ομοίως αν $\varepsilon = 2$.
2202. Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής είναι τετράγωνο με πλευρά 4. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.
2203. Δίνεται η υπερβολή $9x^2 - y^2 = 1$. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 2$ είναι παράλληλη σε μία από τις ασύμπτωτες. Σε πόσα σημεία η ε τέμνει την υπερβολή;
2204. Δίνεται η υπερβολή $3x^2 - y^2 = 3a^2$. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον άξονα $x'x$.
2205. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου βάσης.
2206. Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής $x^2 - 2y^2 = 2$ στο σημείο $A(2,1)$. Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών από την εφαπτομένη είναι 1.
2207. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ που διέρχονται από το σημείο $A(1,0)$.
2208. Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x-y+1=0$ εφάπτεται στην υπερβολή $x^2 - 4y^2 = 12$ στο $K(-4,-1)$.
2209. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ με εστίες E, E' . Να βρείτε την εφαπτομένη της στο $M(6, \frac{3\sqrt{5}}{2})$ και το σημείο P που η εφαπτομένη τέμνει τον $x'x$. Να δείξετε ότι $E'MP = EMP$.
2210. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο $A(4,0)$ τέμνει την ασύμπτωτη $y = \frac{3}{4}x$ στο σημείο Γ . Να δείξετε ότι $(OE)=(O\Gamma)$, όπου E η εστία της υπερβολής.
2211. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$ στα σημεία με τετμημένη 3.
2212. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ στην κορυφή A τέμνει την ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ , να δείξετε ότι το τρίγωνο $OE\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
2213. Δίνεται η έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$ και η υπερβολή $x^2 - 7y^2 = 14$. Να δείξετε ότι:
- Έχουν τις ίδιες εστίες.
 - Τα σημεία τομής των σχηματίζουν ορθογώνιο.
 - Οι εφαπτόμενες στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.



Συνδυασμός : Παραβολής , Έλλειψης , Υπερβολής

2214. Να βρεις εστία και διευθετούσα και να κάνεις σχήμα :

$$y^2 = -4x, x^2 + 8y = 0, 2y^2 - 5x = 0, 3x^2 + \frac{1}{2}y = 0$$

2215. Να κατασκευάσεις ελλείψεις : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, x^2 + 3y^2 = 1$

2216. Να βρεις κορυφές ,εστίες , ασύμπτωτες , σχήμα των υπερβολών : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, 3x^2 - y^2 = 3$

2217. Να βρεις την παραβολή με κορυφή (0,0) , άξονα γγ' και διέρχεται από Α(-1,3)

2218. Να βρεις έλλειψη με Ε(4,0) και μικρό άξονα 10

2219. Να βρεις υπερβολή με εστίες στον x' , εστιακή απόσταση 20 και απόσταση κορυφών 12

2220. Ν.δ.ο. η παραβολή $y = ax^2$ και ευθεία $y = x$ τέμνονται σε δύο σημεία

2221. Να βρεις την έλλειψη που διέρχεται από Μ(2,1) και ο μικρός άξονας είναι το $\frac{1}{3}$ του μεγάλου

2222. Ν.δ.ο. η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ είναι ημιυπερβολή . Να γίνει σχήμα

2223. Να βρεις την εφαπτομένη της $y^2 + 6x = 0$ που είναι // στην ευθεία $3x - 2y + 1 = 0$



2224. Να βρεις τις κορυφές τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε έλλειψη $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$
2225. Να βρεις την οξεία γωνία των ασυμπτωτών της υπερβολής : $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$
2226. Να βρεις την εφαπτομένη της $x^2 = 4y$ που είναι $\perp \vec{a} = (1, -2)$
2227. Να βρεις τα κοινά σημεία των : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, τι σχήμα δημιουργούν;
2228. Να βρεις την υπερβολή με $\varepsilon=2$ και ίδιες εστίες με $5x^2 + 9y^2 = 45$
2229. Να βρεις την γωνία των εφαπτόμενων της $y^2 = x$ που διέρχεται από το $A(-2,1)$
2230. Να βρεις τα σημεία M της έλλειψης $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ όπου $E'ME=90^\circ$
2231. Να βρεις την εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από $A(8,6)$ και $E'AE=90^\circ$
2232. Να βρεις την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = -x$ που σχηματίζει με την $2x - 3y + 6 = 0$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$
2233. Να βρεις τη γωνία των εφαπτόμενων της $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ που διέρχονται από το $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$
2234. Αν η απόσταση του M από $A(5,0)$ είναι τα $\frac{5}{3}$ της απόστασης του M από την $\varepsilon : x = \frac{9}{5}$, ποιος ο γ.τ. ;
2235. Ποια η κοινή εφαπτομένη των $y^2 = x, x^2 = y$
2236. Να βρεις τις εφαπτόμενες της $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ που ορίζουν ισομήκη τμήματα στους άξονες .
2237. Να βρεις τις εφαπτόμενες της $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ που είναι $//$ στην $2x - y + 1 = 0$
2238. Να βρεις τις κοινές εφαπτόμενες των $y^2 = 4x, x^2 + y^2 = \frac{81}{10}$
2239. Να βρεις την έλλειψη με εστία $E(2,0)$ που εφάπτεται στην $2x + 3y + 9 = 0$
2240. Να βρεις τις εφαπτόμενες της $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ που απέχουν από αρχή αξόνων απόσταση 1
2241. Να βρεις τη χορδή της $x^2 = 2y$ με μέσο το $A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$
2242. Να βρεις τις ελλείψεις με εστίες στον x' που εφάπτονται στην ευθεία $x - y + 1 = 0$



2243. Να βρεις εφαπτόμενες της $y^2 - x^2 = 4$ που σχηματίζουν με ημιάξονες Ox, Oy τρίγωνο με εμβαδό

$$E = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2244. Ν.δ.ο. $y^2 = 4x, (x-4)^2 + y^2 = 13$ έχουν 4 κοινά σημεία . Να βρεις το εμβαδό του τετραπλεύρου που δημιουργείται

2245. Να βρεις τη χορδή της έλλειψης $3x^2 + 5y^2 = 15$ με μέσο το $M\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

2246. Ν.δ.ο. το εμβαδό του τριγώνου που δημιουργείται από ασύμπτωτες της $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με οποιαδήποτε εφαπτομένη της είναι σταθερό .

2247. Αν η εφαπτομένη της $y^2 = 2px$ στο M τέμνει τη διευθετούσα στο N , ν.δ.ο. $MEN=90$

2248. Να βρεις τα σημεία M όπου η απόστασή τους από το $A(2,0)$ να είναι τα $\frac{2}{3}$ της απόστασής τους από την ευθεία $\varepsilon : 2x - 9 = 0$

2249. Να βρεις τη χορδή της υπερβολής $x^2 - y^2 = 4$ που έχει μέσο το $M(3,-1)$

Να βρεις το σχήμα και να σχεδιάσεις :

2250. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

2251. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2252. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2253. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$

2254. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$

2255. $3x^2 + 3y^2 - 6x - 2 = 0$

2256. $(2x-1)^2 + (2y+3)^2 = 8$

2257. $9x^2 + 4y^2 = 36$

2258. $9x^2 - 4y^2 = 36$

2259. $9x^2 - 4y^2 = 0$



2260. $9x^2 - 4y = 0$

2261. $9x^2 + 9y^2 = 1$

2262. $9x^2 + 4y^2 = 1$

2263. $9x^2 - 4y^2 = 1$

2264. $9x^2 - 4y = 0$

2265. Να βρεις την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$ που είναι παράλληλη στην $y = 2x + 1$

2266. Να βρεις την εφαπτομένη της $y^2 - 4x = 0$ που είναι παράλληλη στην $y - 2x = 0$

2267. Να βρεις τις εφαπτόμενες της $16y^2 - 9x^2 = 144$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,0)$

2268. Να βρεις την εφαπτομένη της $16y^2 + 9x^2 = 144$ που είναι κάθετη στη διχοτόμο πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου

Να βρεις τις εφαπτόμενες των κωνικών στα σημεία :

2269. $y^2 = 12x, A(3,6)$

2270. $x^2 + y^2 = 4, B(\sqrt{3},1)$

2271. $x^2 - y^2 = 4, G(2,0)$

2272. $4x^2 + 9y^2 = 36, D(3,0)$

2273. $x^2 + y^2 = 4, E(1,3)$

Να βρεις τι παριστάνουν οι εξισώσεις :

2274. $y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$

2275. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y = -2$

2276. $2x^2 + 8x - 2y = -9$

2277. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y = 11$

2278. $16x^2 - 36y^2 + 32x + 36y = 137$

2279. $x^2 - y^2 - 4x + 2y = -3$

