



Παράγωγοι ΚΑΤΕ



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
313 ασκήσεις
και τεχνικές
σε 44 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Τα πάντα είναι
παράγωγοι

Εξισώσεις και ανισώσεις

1754.

Δίνεται $f(x) = e^{-x} + \ln(2-x)$

- Να βρεις μονοτονία,
- ακρότατα,
- σύνολο τιμών,
- πλήθος ριζών για τη συνάρτηση.

- Να λυθεί η εξίσωση : $e^{2-3x} - e^{3-2x} = \ln \frac{5-2x}{4-3x}$

Να λυθεί η εξίσωση

δημιούργησε συνάρτηση φέρνοντας όλα στο πρώτο μέλος. Για τη συνάρτηση ακολούθησε τα βήματα για να βρεις πλήθος ριζών και στη συνέχεια βρίσκεις τις ρίζες με το 'μάτι'.

↓, $\mathbb{R}$, 1 ρίζα, $x = -1$

1755.

Να λύσεις την εξίσωση : $e^x + e^{3x} = 2$

$x = 0$

Μονοτονία :

$$f \uparrow \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2)$$

και

$$f \downarrow \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ τότε } f(x_1) > f(x_2)$$

.Αν ζητηθεί μονοτονία και η φείναι παραγωγίσιμη τότε χρησιμοποίησε $f'(x)$ και δες τον πίνακα προσήμων αλλιώς ξεκίνα με $x_1 < x_2$ και εξέτασε $f(x_1); f(x_2)$

1756.

Ν.δ.ο. για κάθε a η εξίσωση $5x^4 - 8x^3 - ax + a = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 2)$

1757.

Ν.δ.ο. η εξίσωση $xe^x = 2021$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, +\infty)$

1758.

Ν.δ.ο. η εξίσωση $x^4 - 4x + 6 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες



1759. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a-2}{a+3}\right)^x$. Να βρεις το a ώστε να είναι γνησίως φθίνουσα, $\forall x \in \mathbb{R}$

$(2, +\infty)$

Λύση εξίσωσης με $f \rightarrow$ κάνε πράξεις ώστε να εμφανίζεται $f(\dots) = f(\dots)$ και με την προϋπόθεση ότι η f είναι 1-1 διώχνεις τα f και συνεχίζεις

Λύση ανίσωσης με $f \rightarrow$ κάνε πράξεις ώστε να εμφανίζεται $f(\dots) < f(\dots)$ και εφόσον γνωρίζεις τη μονοτονία της f διώχνεις τα f ($f \uparrow$ δεν αλλάζεις φορά ενώ με $f \downarrow$ αλλάζεις φορά ανίσωσης) και συνεχίζεις

1760. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln x$.

- Ν.δ.ο. $a, b \in (0, +\infty), a < b \Rightarrow e^b - e^a > e^{a+b} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.
- Να λύσεις την ανίσωση $e^{-(x^2+1)} - e^{-(x^2+x+2)} < \ln(x^2+1) - \ln(x^2+x+2)$

$x < -1$

1761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - a^x, a \in (0, 1)$,

- να βρεις μονοτονία
- να λύσεις την ανίσωση $a^x - a^{x^3} > x - x^3$

$\uparrow, (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

1762. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 1$.

- Να βρεις μονοτονία
- να λύσεις την ανίσωση $f(f(x)) > 7$

$\uparrow, x > 0$

1763. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x$,

- να μελετήσεις μονοτονία
- να λύσεις την ανίσωση $\ln^2(x^2+4) - \ln^2(x^2+x+1) < 0$

1764. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 10^x + 100^x - 110$.

- Να βρεις μονοτονία
- να λύσεις τις ανισώσεις: $10^x + 100^x < 2, f(f(x)) > -108$

$\uparrow, x < 0, x > 1$

1765. Να λύσεις την ανίσωση: $\ln \frac{x^2+1}{x^2+x+5} < (x^2+x+5)^5 - (x^2+1)^5$



$$x > -4$$

1766. Να βρεις το σημείο της ευθείας $y = 2x - 1$ που έχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(1, 0)$
1767. Έστω συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 2$, να βρεις το a σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις
- να έχει ελάχιστο $x = -2$
 - να έχει ελάχιστη τιμή το -2
 - να μπορεί η συνάρτηση να πάρει την τιμή -2
1768. Αν $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1-|x|}$, να μελετήσεις τη μονοτονία
1769. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες και οι γραφικές τους παραστάσεις είναι πάνω από τον άξονα xx' , ν.δ.ο.

- η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα
- η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα

1770. Δίνεται η εξίσωση $\ln x = 1 - x$.

- Ν.δ.ο. έχει μοναδική λύση και να βρεθεί.

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$.

- Ν.δ.ο. είναι 1-1 και
- να λύσεις την εξίσωση $\ln^5 x + \ln x = (1-x)^5 + 1 - x$.

$$x=1, x=1$$

1771. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty), f^3(x) - 3f(x) - x = 0$

- Ν.δ.ο. η συνάρτηση είναι αύξουσα,
- να βρεις το $f(2)$
- να λύσεις την ανίσωση $f(f(x)) > 2$

1772. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 6x + 5, a \in \mathbb{R}$ Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.

1773. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε:

- η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda - 1)x^2 + 6(1 - \lambda)x + 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
- η συνάρτηση: $g(x) = (\lambda + 2)x^3 - 3\lambda x^2 + 9\lambda x + 4$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1774. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $e^x + x - 1 = 0$



- $\ln x + x - 1 = 0$
- $\ln x - \frac{e}{x} = 0$
- $e^x - \frac{e}{x} = 0, \quad x > 0$

1775. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $e^{x-1} = 2 - x$
- $\ln(x+1) = -x$
- $e^{x-1} = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
- $1 + \ln(x+1) = \frac{1}{x+1}$

1776. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $e^x = x + 1$
- $\ln x = x - 1$

1777. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x+1)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1$

- Να βρείτε την f' .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να λύσετε την εξίσωση: $xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 = 1$

1778. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = a^x - x, \quad 0 < a < 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση: $a^{x^2-4} - a^{x-2} = (x^2 - 4) - (x - 2)$

1779. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}$ (Θέμα εξετάσεων)

1780. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $e^{x^4} + x^2 = x + 1$
- $e^{x^3} = 1 + \ln(x+1)$

1781. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = x - x^2$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

1782. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $3^x + 4^x = 5^x$
- $5^x + 12^x = 13^x$
- $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x$



- $2 \cdot 5^x + 5 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x = 0$

1783. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $x^4 - 12x^2 + 24 = 24\sin x$
- $x^5 - 20x^3 + 120x = 120\eta\mu x$

1784. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
- $2e^x + e^{-2x} = 1 + 2e^{-x} + 2xe^{-x}$
- $e^x(x+1+\ln(x^2+1)) = 1$
- $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$
- $6x^2 \ln x = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
- $2e^{x-1} = x^2 + 2x + 2$

1785. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2(6\ln x - 1) - x^3 - 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 1 \quad \text{έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.}$$

1786. Δίνεται η εξίσωση $x^x = 2^{x+4}$, $x > 0$.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = 0$, όπου:

$$f(x) = \ln x - \left(1 + \frac{4}{x}\right) \ln 2$$

- Να λύσετε τη δοσμένη εξίσωση.

1787. Να αποδείξετε ότι:

- $e^x > 1 - x$ για κάθε $x > 0$ και $e^x < 1 - x$ για κάθε $x < 0$
- $\ln x < 1 - x$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $\ln x > 1 - x$ για κάθε $x > 1$

1788. Να αποδείξετε ότι:

- $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $x - \ln x \geq 1$ για κάθε $x > 0$

1789. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x - x$ με $0 < \alpha < 1$

- Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- Να λύσετε την ανίσωση: $\alpha^{x^2 - \alpha x + 2} > x^2 - (x + 2)$

1790. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g'(x) + x(e^x -$

1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση: $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα,
- αν $f(0) = g(0)$, τότε: $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$

1791. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x - 1)\ln x + 2$, $x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.



- Αν $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha-1} > \beta^{\beta-1}$.

1792. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2(e^x - e^\alpha) - (x - \alpha)(e^x + e^\alpha)$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Αν $\beta > \alpha$, να αποδείξετε ότι: $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{e^\alpha + e^\beta}{2}$

1793. Να αποδείξετε ότι:

- $\ln x > \frac{e}{x}$ για κάθε $x > e$
- $\ln x \leq \frac{x}{e}$ για κάθε $x > 0$
- $e^x \leq 1 + xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > -1$
- $(2-x)e^{x-1} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1794. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu 2x + \eta\mu x \geq 3x\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

1795. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

- $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}x^2 > 1$
- $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$
- $x^5 - 20x^3 + 120x > 120\eta\mu x$
- $24 - 12x^2 + x^4 > 24\sigma\upsilon\nu x$
- $(x+1)^v > 1 + vx$ για κάθε $x > 0$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$
- $(x+1)^v > 1 + vx + \frac{v(v-1)}{2}x^2$ για κάθε $x > 0$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 3$

1796. Να αποδείξετε ότι:

- $e^x \leq (1+x)^{x+1}$ για κάθε $x > -1$
- $xe^{x-\frac{1}{x}} \geq 1$ για κάθε $x \geq 1$

1797. ίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\alpha^2 - x^2}{2\alpha x} - \ln \alpha + \ln x$, όπου $\alpha > 0$

- Να βρείτε την παράγωγο και τη μονοτονία της f .
- Αν $\beta \geq \alpha$, να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$

1798. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: $\beta^2 e^{\frac{\alpha}{\beta}} + \alpha^2 \geq \alpha\beta + \beta^2$

1799. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha > \beta$ ισχύει:



- $\ln \frac{\alpha}{\beta} > 2 \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$
- $2\alpha\beta \ln \frac{\alpha}{\beta} < \alpha^2 - \beta^2$
- $\ln(\alpha^\alpha \beta^\beta) > (\alpha + \beta) \ln \frac{\alpha+\beta}{2}$

1800. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$.
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

1801. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + x - 2$

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) < x + 1$.

1802. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , την f' και την f'' .
- Να μελετήσετε τη μονοτονία της f' .
- Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)\ln x = 2(x-1)$.

1803. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x \ln x$ και $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .
- Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν στα κοινά τους σημεία κοινή εφαπτομένη.

1804. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
- Έστω η συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° . (Θέμα εξετάσεων)

1805. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x + x - 1$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .



- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $x + \ln x = 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x^2 + x) + (x^2 + x) < \ln(3 - x) + (3 - x)$

1806. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 2x + 1$

- Να βρείτε τις $f', f'', f^{(3)}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} + \ln x = 2x - 1$.
- Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $(2x - 1 - \ln x)e^{1-x} < 1$

1807. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

- Να αποδείξετε ότι: $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
- Να αποδείξετε ότι: $e^{-x} \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \right) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}$

1808. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$. (Θέμα εξετάσεων)

1809. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$.
- Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$.
- Να αποδείξετε ότι: $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a \geq e$

1810. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(x-1)e^{x+1}}{x^2}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f .
- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης: $g(x) = x^2 e^x - 2(x-1)e^x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

1811. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 1 - \sqrt{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.



- Να αποδείξετε ότι: $2\sqrt{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 2$ για κάθε $x > 0$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

1812. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, $f(0) = 3$ και: $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(x) - x$ είναι θετική στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

1813. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.
- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να ορίσετε, αν υπάρχει, την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

1814. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$, της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

- Να αποδείξετε ότι: $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$ για κάθε $x \geq 1$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

1815. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$f(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση $h(x) = xf'(x) - f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- ισχύει $h(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$,
- η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

1816. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:

$f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$ Αν $f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- $f'(1) = 1$,
- $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$,
- $f(x) = \ln x$, $x > 0$,
- η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $y = \frac{1}{e}x$.



- 1817.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
 - Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$, με $\alpha > 0$, και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, με $\beta \in \mathbb{R}$, ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
 - Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες. (Θέμα εξετάσεων)
- 1818.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x - \frac{3\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι: $x(2 + \sigma\upsilon\nu x) > 3\eta\mu x$
 - Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 1819.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 0$
 - Αν α είναι ρίζα της f , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$ στο σημείο $A(\alpha, g(\alpha))$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln x$.
 - Πόσες κοινές εφαπτομένες έχουν οι C_g, C_h , όπου g, h είναι οι παραπάνω συναρτήσεις;
- 1820.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^{-x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f' .
 - Να αποδείξετε ότι $f'(x) \in (0, 1]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι: $0 < f(x) < x + 1$ για κάθε $x > 0$
- 1821.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) + 3x^2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$
- Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να βρείτε το πρόσημο της f .
- 1822.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $g(0) = -1$ και $g'(x) = 2g(x)$, $f''(x) + 2f(x) > 3f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τον τύπο της g .
 - Να αποδείξετε ότι $f'(x) > f(x) - e^{2x}$, $x > 0$.



- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2e^x - e^{2x}$, $x > 0$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)e^{-2x})$

1823. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - 6x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ Να βρείτε:

- την παράγωγο της f ,
- τα κρίσιμα σημεία της f .

1824. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{αν } x < 1 \\ x^3 - 3x^2 + 5, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 6, & \text{αν } x \in [-3, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3, & \text{αν } x \in [1, 3] \end{cases}$

1825. Να αποδείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τη σχέση: $f^2(x) + 2f(x) = x^3 + x + e^x$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.

1826. Αν οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x^2 + x + \beta}$ και $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

έχουν τα ίδια κρίσιμα σημεία, να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β .

1827. Αν x_1 και x_2 είναι κρίσιμα σημεία της συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$



Εφαρμογές μονοτονίας

1828. Αν $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), b > a \Rightarrow \frac{\varepsilon\varphi b}{\varepsilon\varphi a} > \frac{b}{a}$

1829. Αν $a > b \Rightarrow \eta\mu a - \eta\mu b < a - b$

1830. Αν $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), a < b \Rightarrow \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$

1831. Για ποιες τιμές του α η $f(x) = -2x^3 + ax^2 - 6x + 7$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της

[-6, 6]

1832. Να υπολογίσεις το α , αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - \alpha x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα

1833. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$,

- να μελετήσεις μονοτονία
- αν $a > b > e \Rightarrow a^b < b^a$

1834. Αν $a > b > 0 \Rightarrow e^{a-b} > \frac{1+a}{1+b}$

1835. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, a > b > e \Rightarrow a^b < b^a$

1836. Δίνεται συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + x - \ln x, m > 0$,

- να βρεις μονοτονία και
- ν.δ.ο. $mx + x > 1 + m + \ln x$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- Ν.δ.ο. ισχύει μονή ανίσωση με έναν άγνωστο : τα φέρνεις όλα στο πρώτο μέλος ορίζεις συνάρτηση f και χρησιμοποιείς τα ακρότατά της
- Ν.δ.ο. ισχύει μονή ανίσωση με 2 αγνώστους α, β : διαχωρίζεις τα α με τα β , ορίζεις συνάρτηση κοιτώντας το ένα μέλος και χρησιμοποιείς τη μονοτονία της συνάρτησης σε συνδυασμό με τη σχέση των α, β π.χ. $\alpha < \beta$
- Ν.δ.ο. ισχύει διπλή ανίσωση με έναν άγνωστο : σπάσε την ανίσωση σε δύο και κάνε δύο φορές ότι και στην μονή ανίσωση με έναν άγνωστο.
- Ν.δ.ο. ισχύει διπλή ανίσωση με 2 αγνώστους α, β : Θα χρειαστείς να εφαρμόσεις Θ.Μ.Τ. στη συνάρτηση που φαίνεται στο μέσο της διπλής ανίσωσης, στο διάστημα α, β . Αν είσαι πιο προσεκτικός θα δεις ότι στο μέσο βρίσκεται ή μπορείς να εμφανίσεις την ποσότητα $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$
- ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΙΣΧΥΕΙ ΑΝΙΣΩΣΗ : τότε εφαρμόζεις Fermat, δηλαδή, τα φέρνεις όλα στο πρώτο μέλος, ορίζεις συνάρτηση $f(x)$, οπότε έχεις $f'(x) \geq 0$, τη μετατρέπεις σε $f(x) \geq f(k)$ οπότε $f'(k) = 0$



1837. Δίνεται η $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

- να βρεις μονοτονία και
- ν.δ.ο. $v^{v+1} > (v+1)^v, \forall v \geq 3$.
- Να συγκρίνεις τα ζεύγη : e^π, π^e & $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$

1838. Αν $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0$

- Ν.δ.ο. $x \leq (x+1)\ln(x+1), \forall x > -1$,
- να βρεις μονοτονία και
- ν.δ.ο. $2021^{2021} > 2022^{2020}$

1839. Ν.δ.ο. $e^x + e^{-x} \geq x^2 + 2, x \geq 0$

1840. Ν.δ.ο. $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x, x \geq 0$

1841. Ν.δ.ο. $-x - \frac{x^3}{6} < \eta \mu x < x, \forall x > 0$

1842. Ν.δ.ο. $x > \ln(x+1), x > 0$

1843. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}$,

- να βρεις το μέγιστό της και
- να συγκρίνεις τους αριθμούς $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}, b = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3}$

$a > b$

1844. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

- να βρεις το μέγιστο και
- να συγκρίνεις τους αριθμούς $3^{\sqrt{5}}, 5^{\sqrt{3}}$

$x = e^2, 3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$



Εφαρμογές ακροτάτων

1845. $\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow e^x + \ln(x+1) > 1$

1846. Αν $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ν.δ.ο.

- Να δείξεις ότι $x \geq \eta\mu x$
- Επιπλέον ν.δ.ο. η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο ίδιο διάστημα.

1847. $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$

1848. $\forall x \geq 0 \Rightarrow \eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$

1849. $\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

1850. Να βρεις τα a, β όταν συνάρτηση $f(x) = \frac{ax-b}{x^2-5x+4}$ έχει στο $x=2$ ακρότατο με τιμή -1

1851. Να βρεις τη σχέση των a, β όταν η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - ax + b + 1}{e^x}$ έχει ακρότατο στο $x=2$

$a-b=1$

1852. Να δείξεις ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: x^3 + 2x = e^{f(x)} + 2f(x)$ δεν παρουσιάζει ακρότατο

1853. Να δείξεις ότι $e^x \geq x+1$

1854. $\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow \frac{x^2-1}{2x} > \ln x$

1855. Αν $1 < x < y \Rightarrow e^{y-x} > \frac{y}{x}$

1856. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g όπου η διαφορά $g(x) - f(x)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x=1$. Να δείξεις ότι οι εφαπτομένες των συναρτήσεων στο $x=1$ είναι παράλληλες.

1857. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax - \frac{x^3}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα. Ν.δ.ο. $a \geq \frac{9}{8}$



1858. Ν.δ.ο. $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, x > 0$

1859. Δίνεται η $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

- να μελετήσεις μονοτονία και
- να συγκρίνεις e^π, π^e

1860. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - bx - a, x \in \mathbb{R}, 0 < a < 1, b > 0$.

- Να βρεις μονοτονία,
- σύνολο τιμών.
- Ν.δ.ο. η εξίσωση $a^x = bx + a + 2020$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

↓, $\mathbb{R}$

1861. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}, x > 1$, αν $1 < a < b \Rightarrow \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha\beta}$

1862. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(1) = 3, f(2) = -5$
- $g(-1) = 2, g(1) = 7, g(3) = 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

1863. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και τα πιθανά τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

1864. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 1, x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f , καθώς και τα πιθανά τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.



- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

1865. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 30$

- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία της C_f με τετμημένες τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f και το $O(0,0)$ είναι συνευθειακά.

1866. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

- $f(x) = x^2 - 2x + 3$
- $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$
- $f(x) = x^3 - 3x$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$
- $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x - 10$

1867. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
- $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$
- $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$
- $f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$

1868. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = e^x - x$
- $f(x) = e^{-x} + x$
- $f(x) = \ln x - x$
- $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- $f(x) = \ln(4 - x^2)$
- $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1} + \ln(x-1)$
- $f(x) = \ln(\ln x) - \ln x$

1869. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1} + \ln(x-1)$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.



- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

1870. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

- $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 4x + 1$
- $f(x) = (x-1)(e^x - x) - e^x + \frac{x^2}{2}$
- $f(x) = x(\ln^2 x - 3\ln x + 3)$
- $f(x) = x^3(1 - 3\ln x) - 36x(1 - \ln x)$
- $f(x) = \ln \frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1}$

1871. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

- $f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1$
- $f(x) = e^{x-1} - \ln(x+1)$
- $f(x) = 6xe^{-x} + 12e^{-x} - x^3 + 6x + 1$
- $f(x) = x^2 - 2 - (1-x)(\ln x - 2)$

1872. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την $f'(x)$.
- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και τα πιθανά τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

1873. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$
- $f(x) = |x^2 - 1| + 2$

1874. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = x^x, \quad x > 0$
- $f(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0$

1875. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 8x + 14, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

1876. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 6x + 11, & x \geq 2 \end{cases}$

- Να βρείτε την $f'(x)$.
- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και τα πιθανά τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.



1877.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 5, & x \leq 1 \\ 2x \ln x - 6, & x > 1 \end{cases}$

- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και τα πιθανά τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

1878.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 9x^2 + 12x + 16, & x \in [-3, 1) \\ 2x^3 - 27x^2 + 84x - 20, & x \in [1, 8] \end{cases}$ Να μελετήσετε την f ως

προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

1879.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \begin{cases} (x+2)(x-1)^2, & \text{αν } x < 1 \\ -(x^2 - 4x + 3)^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} 1 - \eta\mu x, & \text{αν } x \in [-\pi, 0) \\ \sigma\upsilon\nu x - x, & \text{αν } x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

1880.

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

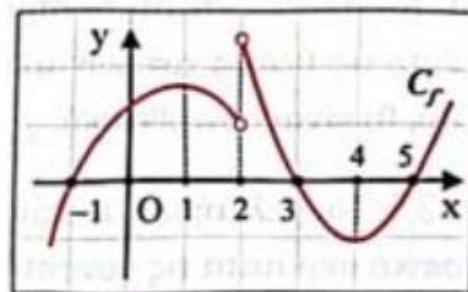
- $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 5, & x \leq 1 \\ 2x \ln x - 6x, & x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -12(x+2)e^{-x}, & x \leq 0 \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 24, & x > 0 \end{cases}$

1881.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f ,

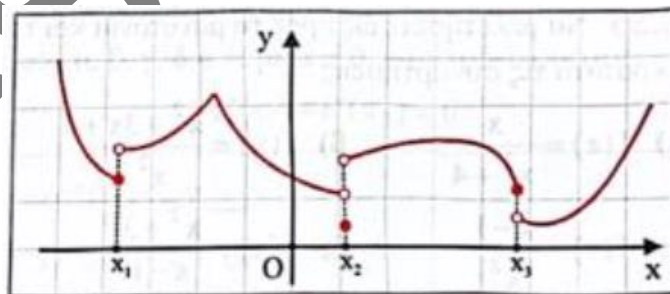
της παραγώγου μιας συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f .



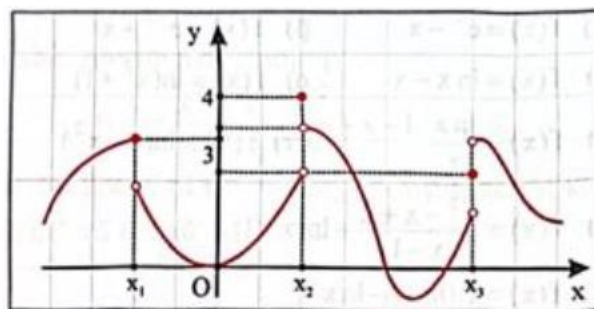
1882.

Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .





1883. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



1884. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 6, & x < 5 \\ x^2 - 12x + 34, & x \geq 5 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- Να επιβεβαιώσετε τα παραπάνω συμπεράσματα κάνοντας τη γραφική παράσταση της f .

1885. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 0 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να εξετάσετε αν στο σημείο $x = 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Ποια είναι τα τοπικά ακρότατα της f ;
- Να επιβεβαιώσετε τα παραπάνω συμπεράσματα κάνοντας τη γραφική παράσταση της f .

1886. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 10, & \text{αν } -5 \leq x \leq -2 \\ x^2 - 6, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ x^2 - 6x + 14, & \text{αν } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

- Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.
- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .
- Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f ;
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.



1887. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + x + 1$ με $\alpha \in (-2, 2)$ Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

1888. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + (\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 5)x + 4$ Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η f να μην έχει ακρότατα.

1889. Να αποδείξετε ότι στις παρακάτω περιπτώσεις η παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

- $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$ για κάθε $x > 0$
- $f^3(x) + 3f(x) = x^3 + 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) + e^x f(x) = 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1890. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) - 2 = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης: $g(x) = e^x - x - 1$
- Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

1891. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + x f^2(x) = 2x^3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{Αν } \alpha \neq 0, \text{ να αποδείξετε ότι η } f \text{ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο } \alpha.$$

1892. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - 3x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f' .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $f'(x) = 0$, καθώς και το πρόσημό της.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα.

1893. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = (\ln x - 1)^2(x - 2)^2, \quad x > 0$ και $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}, \quad x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 στο διάστημα $(2, e)$.
- Να βρείτε το πρόσημο της g .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

1894. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (e^x - 2)^2(x - 1)^2, \quad x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x e^x = 2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(\ln 2, 1)$.



- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα.

1895. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν: $-f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f(1) = f(3) = 0$ α) Να αποδείξετε ότι:

- η f' είναι γνησίως αύξουσα,
- η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
- Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 3)$.
- Αν $\alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$, να αποδείξετε ότι: $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$

1896. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $\alpha, \beta > 0$, με $\alpha < \beta$ τέτοια, ώστε $\alpha f'(\alpha) + \beta f'(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$.

1897. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αλλά όχι αντιστρέψιμη, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

1898. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f''(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0)$ και $f''(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$ - $f'(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f' .
- Να αποδείξετε ότι η f' έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0 < x_2$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

1899. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f(-1) = f(1) = 0$

- Να αποδείξετε ότι η f' έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

1900. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: - η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, - $f(1) = 0$, - η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχει αριθμός $\xi \in (1, x)$ τέτοιος, ώστε $(x-1)f'(\xi) = f(x)$.

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ με $x > 1$. Να αποδείξετε ότι:

- $g'(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1}$
- η g είναι γνησίως αύξουσα.

1901. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$.



- Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g όταν: i) $f''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$
- η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι "1 - 1".

1902. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία: $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$

1903. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Αν το $f(-1) = 2$ είναι τοπικό ακρότατο της f , να βρείτε τις τιμές των α, β .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

1904. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2(\alpha + 1)\ln x + \beta x^2 - (2\alpha + \beta)x + 1$

- Να βρείτε τα α και β , ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
- Να βρείτε το είδος των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

1905. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3(\alpha + 2)x^2 + 6\alpha^2 x + 3$ Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$.

1906. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3(\alpha - 1)x^2 + 6\alpha^2 x + 1$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο: $x_0 = -1$

1907. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + x^3 = 3xf(x) - 1$ Αν το $f(\alpha)$ είναι τοπικό ακρότατο της f , να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

1908. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2e^x - 2 - \alpha x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο.

- Να βρείτε την τιμή του α .
- Να αποδείξετε ότι: $x^2 + 2e^x \geq 2(1 + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$



"Fermat"

FERMAT

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 τότε

$$f'(x_0) = 0$$

1909. Να βρεις το a ώστε $a^x \geq x+1$

$$a = e$$

1910. Να βρεις τη σχέση των a, β όταν $a^x + b^x \geq 2$

$$ab = 1$$

1911. Να βρεις το a ώστε

$$a = 1$$

1912. Αν

$$a = e$$

1913. Δίνεται η παραγωγίσιμη

$$f : f(2x+1) \geq 2e^{2x+1}, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 2e \Rightarrow f'(1) = ;$$

$$2e$$

1914. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ώστε $f(0) = g(0), f(x) - g(x) \geq 2x$, να εξετάσεις αν οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στο 0 είναι παράλληλες.

1915. Για μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη ισχύει $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ με

$$\beta^2 < 3\gamma$$

- ν.δ.ο. η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα
- να εξετάσεις αν αντιστρέφεται

1916. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $xf(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x$, ν.δ.ο. η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(0,3)$

1917. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

- Να βρεις την κυρτότητά της
- Να βρεις την εφαπτομένη της στο $A(e,1)$.
- Ν.δ.ο. $\ln x^e \leq x, x > 0$

$$\cap, y = \frac{1}{e}x$$





1918. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη. Έστω $g(x) f'(x) = 3f(x)$. Αν η f στο $x=1$ έχει σημείο καμπής, ν.δ.ο. η g είναι παραγωγίσιμη και $g'(1) =$;

3

1919. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = 0, f(x) - \ln x \leq 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(1) =$;

1

1920. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x) > 0, f(1) = 1, \ln f(x) \leq 1 - f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(1) =$;

1921.

0

1922. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^x \geq x + 1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

1923. Αν $a^x \geq \ln(x+1) + 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$. (Θέμα εξετάσεων)

1924. Αν είναι $a^x \geq a + e \ln x$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

1925. Αν $a^x + \beta^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$ ($\alpha, \beta > 0$).

1926. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $xf(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f(0) = 3$.

1927. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + 1 \geq x^2 + \sin x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1928. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

1929. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2^x + 3^x - 6^x, \quad x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μέγιστο της f .
- Αν $2^x + 3^x + \alpha^x \leq 1 + 5^x + 6^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in (0, +\infty)$.

1930. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$ όπου $m > 0$.

- Να βρείτε το m , ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να εξετάσετε αν η παραπάνω τιμή του m είναι δεκτή. (Θέμα εξετάσεων)

1931. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με: $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(x) + x^3 \leq g(x) + \alpha^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο α , να αποδείξετε ότι: $f'(\alpha) - g'(\alpha) = -3\alpha^2$

1932. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν ισχύει: $f(2x+1) \geq 2e^{2x+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2e$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

1933. Αν οι αριθμοί α, β και γ είναι θετικοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:



$(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x$ να αποδείξετε ότι οι α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Ανισώσεις

1934. Ν.δ.ο. $\ln(x-1) < x-2, \forall x > 2$

1935. Ν.δ.ο. $e^x(x+1) > 1, \forall x > 0$

1936. Ν.δ.ο. $e^x > x-1, \forall x \in \mathbb{R}$

1937. Ν.δ.ο. $\eta\mu x + \frac{x^3}{3} - x > 0, \forall x > 0$

1938. Ν.δ.ο. $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2}, \forall x > 0$

1939. Ν.δ.ο. $\ln(x^2+1) < x, \forall x > 0$

1940. Ν.δ.ο. $\forall x > 0: 2x - x^2 < 2\ln(x+1) < 2x$

1941. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $xf(x) + 2x \geq 2\ln(x+1)$, ν.δ.ο. η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων

1942. Δίνεται παραγωγίσιμη $g: xg(x) \leq \sin 2x - 1 \Rightarrow g(0) = 0$

1943. Αν $2\ln x \geq a \frac{x-1}{x}, \forall x > 0 \Rightarrow a = ?$

2

1944. Ν.δ.ο. η γραφική παράστασή της $f(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x, x > 1$ δε δέχεται σε κανένα σημείο εφαπτομένη που να την διαπερνά

1945. Ν.δ.ο. είναι γνησίως μονότονη η συνάρτηση $f(x) = a^2x^3 - ax^2 + x - 2a + 3, a \neq 0$

1946. Να βρεις τις τιμές του a ώστε να είναι γνησίως αύξουσα η $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 2020$

[-3,3]

1947. Να βρεις τις τιμές του a ώστε να είναι γνησίως αύξουσα η $f(x) = \frac{a^2x+4}{x+1}$

 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

1948. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = e^x + 5x$, να βρεις μονοτονία



1949. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right)$, $1 < a < b < e \Rightarrow \frac{\ln b}{\ln a} > \frac{1-\ln b}{1-\ln a}$

1950. Δίνεται $f(x) = e^x + e^{2x} - 2$,

- να βρεις το πρόσημο των αριθμών $f\left(-\frac{1}{100}\right), f\left(\frac{1}{100}\right)$,
- να συγκρίνεις τους αριθμούς $f\left(\sqrt[10]{5}\right), f\left(\sqrt[20]{10}\right), f\left(\sqrt[30]{15}\right)$

1951. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, a]$, $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, $h(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow h \downarrow$

1952. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2a}{x} + b$, η οποία μηδενίζεται στο $x = 1$ και παρουσιάζει ακρότατο

στο $x = 2$. Να βρεις το είδος και την τιμή του ακρότατου

$a = 8, b = -17$

1953. Να βρεις τα a, b για τη συνάρτηση που παρουσιάζει ακρότατο στο $A(1, -2)$: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 3}$

$a = -4, b = 6$

1954. Να εξετάσεις αν παρουσιάζει ακρότατα ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης

$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d, b > \frac{3}{8}a^2$

1955. Δίνεται $f(x) = \frac{\ln x}{x}, a > e \Rightarrow a^{a+1} > (a+1)^a$. Επιπλέον ν.δ.ο. $\forall x > 0: x^e \leq e^x$

1956. $\forall x > 0, y > 0, x + y = 1 \Rightarrow x^x y^y \geq \frac{1}{2}$

1957. Να βρεις την τιμή του x ώστε ο ρυθμός μεταβολής να γίνεται ελάχιστος για την

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 3$

$x = 1$

1958. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^{\ln x}$,

- να βρεις τα ακρότατα και
- για $a, b > 0 \Rightarrow a^{\ln a} + b^{\ln b} \geq 2$

1959. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .



- Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

1960. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 3$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, καθώς και το σύνολο τιμών της f .

1961. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 - 5x + 2$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 0$
- Να εξετάσετε αν η f είναι "1 - 1".

1962. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad x \in [-3, 2]$
- $g(x) = x^3 - 3x + 2, \quad x \in [-2, 2]$

1963. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \frac{1}{x-3}$ Να βρείτε:

- τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- τα τοπικά ακρότατα της f ,
- το σύνολο τιμών της f .

1964. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Θέμα εξετάσεων)

1965. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3 + 3x - \alpha$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Αν $|\alpha| < 2$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^3 + \alpha = 3x$
- το σύνολο τιμών της f .

1966. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:



- $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x + 1$

- $f(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 1$

1967. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 - 5\alpha^4 x + 4\alpha^3 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - 5\alpha^4 x + 4\alpha^3$.
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της παραπάνω συνάρτησης f .
- Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α , το πλήθος των πραγματικών ριζών της δοσμένης εξίσωσης.

1968. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - e \ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι $\pi^e < e^\pi$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

1969. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (1-x)(2x^2 - x - 7) - 6x^2(1 - \ln x) + 6$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

1970. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 6xe^{-x} + 12e^{-x} - x^3 + 6x + 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο.
- Να αποδείξετε ότι: $6(x+2) \leq (12 + x^3 - 6x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

1971. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x - x + 1$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f .
- Να αποδείξετε ότι: $\ln x + 2 \leq 2\sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι: $\ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 1$

1972. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \epsilon \phi x - x - \ln(\sin x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$



- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

- Να λύσετε την εξίσωση: $e\phi x - \ln(\sin x) = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

1973. Να αποδείξετε ότι:

- $1 + \ln(1 - x) \leq e^{-x}$ για κάθε $x < 1$,
- η εξίσωση $e^{-x} - 1 = \ln(1 - x)$ έχει μοναδική ρίζα.

1974. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x - 1)\ln x + 2$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

1975. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x \ln x - \frac{x^2+1}{2}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση: $x \ln x + 1 = \frac{x^2+1}{2}$
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
- Να αποδείξετε ότι $\ln x > \frac{x^2-1}{2x}$, $x \in (0,1)$.

1976. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία α, β με $\alpha < \beta$. Αν $g(x) = e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot f'(x)$, τότε:

- να βρείτε την παράγωγο της g ,
- να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\gamma) = \left(\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)}\right)^2$

1977. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

1978. $f(x) = (x - 1)(x - 2)f'(x)$ για κάθε $x \in [1,2]$

- να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.



- να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

1979. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

1980. $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- η f δεν αντιστρέφεται,
- η f' έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο x_0 ,
- οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(1, f(1))$ είναι παράλληλες,
- υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία της γραφικής παράστασης της f' στα οποία οι εφαπτόμενες τους είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

1981. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει:

$$2f(x) \geq f(1) + f(2) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- $f(1) = f(2)$,
- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f , στο σημείο $M(\xi, f'(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

1982. Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 2]$. Αν είναι $f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = 1$, να αποδείξετε ότι:

- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$
- η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α, β) .

1983. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = [2, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ και ισχύουν: $f(2) = f(4) = 2$ και $f(3) = -1$

Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 3$, τότε:

- να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο διάστημα $(2, 3)$,
- να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f ,
- να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -9$.



1984. Σ' ένα τμήμα δόθηκε το εξής πρόβλημα: «Αν η μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.» Ένας μαθητής απάντησε ως εξής: «Είναι $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$. Επειδή το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο, η f είναι αύξουσα αριστερά του x_0 και φθίνουσα δεξιά του x_0 . Άρα είναι $f'(x) \geq 0$ αριστερά (και κοντά) στο x_0 και $f'(x) \leq 0$ δεξιά (και κοντά) στο x_0 . Άρα είναι $g'(x) \leq 0$ σε κάποιο διάστημα (α, x_0) και $g'(x) \geq 0$ σε κάποιο διάστημα (x_0, β) . Επομένως η g αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0 , στο οποίο είναι και συνεχής, οπότε το $g(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.» Ωστόσο ο καθηγητής διέγραψε την απάντηση. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

1985. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \alpha^2 - 4\alpha$, $x \in \mathbb{R}$

όπου α μια πραγματική σταθερά.

- Αν $f(x_1) = 3f(x_2) + 50$, όπου x_1 η θέση τοπικού μεγίστου και x_2 η θέση τοπικού ελαχίστου της f , να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
- Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος. Ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής;

1986. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\kappa x - x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $O(0,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

- Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.
- Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2,4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου:
 $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$ (Θέμα εξετάσεων)

1987. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f' στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.



- Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

1988. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln x - x + 2, \quad x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .
- Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α, β και γ , αν ισχύει η σχέση: $\ln(\alpha\beta\gamma) + 3 = \alpha + \beta + \gamma$

1989. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = 6xe^{-x} + 5e^{-x} + 2x - 7$ και

1990. $g(x) = x^3 - 4x + 5 - 7e^{-x}$

- Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο M .
- Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M .
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης: $h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in \mathbb{R}$

1991. Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα,
- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. (Θέμα εξετάσεων)

1992. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x - x + \frac{x^2}{2} - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο να βρείτε.
- Να εξετάσετε αν το κρίσιμο σημείο της f είναι και θέση τοπικού ακροτάτου της f .

1993. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha \ln 2x + \frac{\beta}{x} + \alpha$

η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, το $2 + \ln 2$.



- Να βρείτε τα α, β .
- Για $\alpha = \beta = 1$: i) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα,
- να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f'(1))$.

1994. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$

και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$. (Θέμα εξετάσεων)

1995. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1) - 1$, $x > -1$

για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x > -1$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα. ii) Να αποδείξετε ότι $(\ln(x+1) + 1)e^{-x} \leq 1$, για κάθε $x > -1$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{f(x)}$
- Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)}{x-1} + \frac{f(\gamma)}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

1996. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$, $x > -1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' .
- Να αποδείξετε ότι: $1 + \ln(x+1) \leq e^x$ για κάθε $x > -1$
- Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$, ώστε: $\alpha^x \geq 1 + \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$



1997. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \ln x - \frac{\alpha}{x} + \alpha$ με $x > 0$

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε:

- να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$,
- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα,
- να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$ με $x > 0$,
- να λύσετε την ανίσωση: $\ln(2x^2 + 2) - \frac{1}{x^2+3} > \ln(x^2 + 3) - \frac{1}{2x^2+2}$

1998. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{x}{\alpha} + 1$ με $\alpha > 0$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha} - 1$.
- Αν $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \frac{\beta x}{\alpha} - \beta$ για κάθε $x > 0$, να βρείτε την τιμή του β .

1999. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^{-v} e^x$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $e^x \geq \left(\frac{ex}{v}\right)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$
- Αν $\alpha^x \geq \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

2000. 2.126 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.



- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.
(Θέμα εξετάσεων)

2001. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Αν $g(x) = f(x) + f'(x)$, να αποδείξετε ότι: $g(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να αποδείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ , ώστε να ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 6$.

2002. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^{x-1} = e^{2025}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
- Αν x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2024$. (Θέμα εξετάσεων)



Σταθερή συνάρτηση

N.δ.ο. f είναι σταθερή : αρκεί ν.δ.ο.

$$f'(x) = 0. \text{ Προσοχή τότε } f(x) = C,$$

για να βρεις το C αρκεί να βρεις την τιμή της f για ένα συγκεκριμένο x , π.χ. αν $f(1)=3$ τότε $f(x)=3$

2003. Δίνεται συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x) = f(x)$.Να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$ είναι σταθερή
2004. Αν για τις συναρτήσεις $f, g : f'(x) = g(x) - 1, g'(x) = -f(x) - x$, ν.δ.ο. η συνάρτηση $h(x) = (f(x) + x)^2 + g^2(x)$ είναι σταθερή .
2005. Αν για δύο συναρτήσεις $f, g : f'(x)g(x) = g'(x)f(x)$ ν.δ.ο. η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ είναι σταθερή .
2006. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(x) \neq 0, f(0)=1, f'(x) = -2xf^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξεις ότι είναι σταθερή η συνάρτηση g
 - Να αποδείξεις ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 - Να βρεις το $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ η $\mu 2x$
 -



Σταθερό πρόσημο

2007. Αν συνάρτηση $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $-x^2 + f^2(x) = 4, A(2, \sqrt{8}) \in C_f \Rightarrow f(x) =$;
2008. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $2xf(x) + f^2(x) = 4, f(0) = -2 \Rightarrow f(x) =$;
2009. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $6f(x) + f^2(x) = 16, f(1) = 2 \Rightarrow f(x) =$;
2010. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $f(x) + f^2(x) = x^2 + \frac{3}{4}, f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) =$;
2011. Αν συνάρτηση $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $x^2 + f^2(x) = 9, f(0) = 3 \Rightarrow f(x) =$;
2012. Αν συνάρτηση $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $\sin^2 x + f^2(x) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow f(x) =$;
2013. Αν συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $\sin^2 x + f^2(x) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow f(x) =$;
2014. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής,
 $(f(x) - 3\sin x)(f(x) + 3\sin x) = 9\eta\mu^2 x, f(0) = -3 \Rightarrow f(x) =$;
2015. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f(x) - 3\sin x)(f(x) + 3\sin x) = 9\eta\mu^2 x \Rightarrow f(x) =$;
2016. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $(f(x) - 3\sin x)(f(x) + 3\sin x) = 9\eta\mu^2 x \Rightarrow f(x) =$;
2017. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $f^2(x) - 2xf(x) = 5, f(2) = -1 \Rightarrow f(x) =$;
2018. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $f^2(x) + 2x = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) =$;
2019. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $-4\sin^2 x + f^2(x) - 4f(x)\eta\mu x = x^2, f(0) = 2 \Rightarrow f(x) =$;
2020. Αν συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, συνεχής, $f^2(x) - 6f(x) + 5 = x^4 + 4x^2 \Rightarrow f(1) =$; $f(x) =$;
- 2021.
- Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση
 $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή
 - Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.
 - Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:
 $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$ όταν $x \in [0, +\infty)$.
2022. Αν συνάρτηση $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, $x^2 + f^2(x) = 3x + 4$, να βρεις



- Τις ρίζες της συνάρτησης
- Τον τύπο της συνάρτησης $\forall x \in (-1, 4)$
- Τον τύπο της συνάρτησης $\forall x \in [-1, 4]$, αν τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο -2

Εύρεση συνάρτησης

2023. Αν συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) \sin x = 2f(x)$, ν.δ.ο. η συνάρτηση $g(x) = f(x) \sin^2 x$ είναι σταθερή
2024. Αν συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(4) = 3$, $2xf'(x) + f(x) = 0$, ν.δ.ο. η συνάρτηση $g(x) = f(x)\sqrt{x}$ είναι σταθερή και να βρεις και τον τύπο της $f(x)$
2025. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 2$, $f(-1) = -3$, $xf'(x) = -2f(x)$, ν.δ.ο. για τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = 0$ και να βρεις και τον τύπο της $f(x)$
2026. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 5$, $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f(x) = ?$
2027. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = x^2 + e^{4x} - \sin 5x \Rightarrow f(x) = ?$
2028. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(4) = 15$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \Rightarrow f(x) = ?$
2029. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(4) = 15$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \Rightarrow f(x) = ?$
2030. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(-1) = -4$, $f(1) = 3$, $f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2} \Rightarrow f(x) = ?$
2031. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 11$, $(x-1)f'(x) = 2x^2 + 3x - 5 \Rightarrow f(x) = ?$
2032. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(1) = e^2$, $f'(x) = 2xf(x) \Rightarrow f(x) = ?$
2033. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = \ln 3$, $f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)} \Rightarrow f(x) = ?$
2034. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 2$, $xf'(x) = f(x) + x \Rightarrow f(x) = ?$
2035. Αν συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 5$, $f(-1) = 2$, $x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 2x^3 + 1 \Rightarrow f(x) = ?$
2036. Αν συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 2$, $f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x = f(x) \sin x \Rightarrow f(x) = ?$



2037. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το πρόσημο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(2013) = 2022$
- $f(2015) = -2004$

2038. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: - το 1 είναι μοναδική ρίζα της f , - $f(-1) = 2$ και $f(2) = -3$. Να βρείτε το πρόσημο της f .

2039. Η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 8$. Επιπλέον είναι: $f(0) = 3, f(2) = -5, f(5) = -4, f(10) = 7$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$
- Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $f(-5), f(6)$.
- Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα, αφού βρείτε το πρόσημο της f .

x	$-\infty$	1	4	8	$+\infty$
f(x)		0	0	0	

2040. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x+4)(x+1)(x-1)(x-4)$

- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε, με δύο τρόπους, το πρόσημο της f .
- Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $f(-7)f(-3)f(3)$ είναι θετικός.

2041. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln^2 x - \ln x$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

2042. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-9}{\ln|x|}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της: $g(x) = \ln|x|, x \neq 0$
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

2043. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x+1| + |x-1| - 4$



- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

- Να βρείτε το πρόσημο της f .

2044. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{24 - 2x - x^2} - x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

2045. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in [0, 2\pi]$

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να υπολογίσετε το πρόσημο της παράστασης: $A = f\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot f\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

2046. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$

2047. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

- $f(x) = x - \eta\mu x$
- $g(x) = x + \eta\mu x$

2048. Αν για κάθε $x \in [-2, 2]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $x^2 + f^2(x) = 4$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.

2049. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = \eta\mu^2 x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

2050. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f(x)(g(x) + 1) \geq 1 \quad \text{Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}.$$

2051. Να αποδείξετε ότι η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο στο διάστημα A στις επόμενες περιπτώσεις:



- $|f(x)| = 5, \quad x \in A = \mathbb{R}$
- $f^2(x) = 4, \quad x \in A = \mathbb{R}$
- $f^2(x) = 4 - x^2, \quad x \in A = (-2, 2)$
- $f^2(x) - x^2 = 6 - 5x, \quad x \in A = (2, 3)$

2052. Να βρείτε το πρόσημο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f^2(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$
- $f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, f(1) = -2$

2053. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(2007) + f(2006) = 0$ και

$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

2054. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(2) + f(4) + f(6) = 0$

- Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

2055. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2006$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(f(2) + 1)x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \right]$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(4) + 2)x^3 + 1}{x^2 + 2}$

2056. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $|f(x)| = 5, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 5$
- $|f(x) - 1| = 2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(1) = 3$

2057. Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f(x) - \sin x)(f(x) + \sin x) = \eta \mu^2 x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο.
- Να βρείτε τον τύπο της f .

2058. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f^2(x) = 9, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $(f(x) - e^x)^2 = 4, \quad x \in \mathbb{R}$



- $f^2(x) + e^x(e^x - 2f(x)) = x^2(x^2 + 2) + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

2059. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με: $(f(x) - x^2)(f(x) + x^2) = 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Να βρείτε τον τύπο της f , αν:

- $f(2000) > 0$
- $f(2025) < 0$

2060. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x) - 2f(x) \cdot \eta\mu x = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2061. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 6x - x^2 - 5, \quad x \in [1,5]$$

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(1,5)$.
- Αν $f(3) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2062. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f(x) - e^x)(f(x) + e^x) = 1 - 2e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Στη συνέχεια να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις σε κάθε περίπτωση.}$$

2063. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στις παρακάτω περιπτώσεις και να κάνετε τις γραφικές τους παραστάσεις:

- $f^2(x) = x^6, \quad x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) = \ln^2 x, \quad x \in (0, +\infty)$

2064. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 4x = x^2 + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f \text{ και να κάνετε τη γραφική παράσταση σε κάθε περίπτωση.}$$

2065. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(0) = 5$ και $g(0) = 4$. Οι C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)(f(x_0) + 1) = \frac{g(x_0)}{x_0}$



2066. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

- Να βρείτε το πρόσημο της f .

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Να βρείτε την αντίστροφη της f .

2067. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f^2(x) - 1 = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
- Αν $f(0) = 1$, τότε: να βρείτε τον τύπο της f ,
- να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xf(x))$.

2068. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πρόσημο της g .

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .

2069. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{f^2(x) + 2\sin x + \cos^2 x}{x^2 + 1} = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της f .

Έστω $f(\pi) = \pi$ και $f(-\pi) = -\pi$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x}{f(x)}$

2070. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

**2071.** $f^2(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) > 2$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- η συνάρτηση: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα,
- η εξίσωση: $e^x + f(x) = e^x f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0 με $x_0 \in (0,1)$.

