



Παράγωγοι ΚΑΤΕ



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση

455 ασκήσεις και τεχνικές
σε 76 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Τα πάντα είναι
παράνωνοι

Εφαπτομένη συνάρτησης

Μορφή εφαπτομένης $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ όπου
 $x_0, y_0 = f(x_0), \lambda = f'(x_0)$. Προσοχή στις συνθήκες

- Εφαπ στο $A(1,2)$: $x_0 = 1, y_0 = 2$
- Εφαπ διέρχεται από $A(1,2)$: $x=1, y=2$
- Εφαπ $// y=ax+\beta$ τότε $\lambda=a$
- Εφαπ $\perp y=ax+\beta$ τότε $\lambda=-1/a$
- Εφαπ $// x x'$ τότε $\lambda=0$
- Εφαπ σγηνισαίξει 45 με $x x'$: $\lambda=\tan 45$

27. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός

αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ϵ που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Οπότε, εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ με } \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2460. Να βρεις την εφαπτομένη στο σημείο με $x=1$ της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

2461. Να βρεις την εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 2 της $f(x) = |6 - 2x^2|$

$$y = 8x - 14$$

2462. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x + 2, x > 0$. Ν.δ.ο. η εφαπτομένη στο σημείο $M(1,3)$ σχηματίζει με άξονες ισοσκελές τρίγωνο με εμβαδό 2



2463. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Ν.δ.ο. η συνάρτηση εφάπτεται του xx' στην αρχή των

αξόνων

2464. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^3(x) + xf(x) = x^2 + 5x + 4$, να βρεις την εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1

$$y = \frac{5}{13}x + \frac{21}{13}$$

2465. Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση με κλίση στο $x=1$ ίση με 2020, ποια η κλίση στο $x=-1$

$$2020$$

2466. Δίνεται συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x-1}}{x-2} = 3$, να βρεις την εφαπτομένη στο $x=2$

$$y = \frac{7}{2}x - 6$$

Ν.δ.ο. ευθεία εφάπτεται σε $f(x)$: Βρίσκω τα κοινά σημεία, λύνοντας την εξίσωση $f(x)=y$, τότε σε κάθε κοινό σημείο x_1 βρίσκω το $f'(x_1)$. Αν $f'(x_1)=\lambda$ τότε εφάπτονται στο x_1 .

Κοινή εφαπτομένη συναρτήσεων f, g στο x_1 : θα πρέπει $f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$

Κοινή εφαπτομένη συναρτήσεων f, g σε διαφορετικά σημεία: εξετάζω αρχικά, αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο. Έστω ότι η κοινή εφαπτομένη εφάπτεται στο $A(a, f(a))$ και στο $B(\beta, f(\beta))$ τότε θα πρέπει $f'(a) = g'(\beta)$ και $f(a) - af'(a) = g(\beta) - \beta g'(\beta)$

2467. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$, να βρεις τις εφαπτόμενες τους στα κοινά τους σημεία

2468. Ν.δ.ο. η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

2469. Δίνεται $f(x) = x^3 - 2x + 4$, να βρεις τις εφαπτομένες που σχηματίζουν 45 με οριζόντιο άξονα

$$y = x + 2, y = x + 6$$

2470. Δίνεται $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 9}$, να βρεις την εφαπτομένη που είναι παράλληλη στην $y = \frac{6}{5}x - 2013$

2471. Δίνεται $f(x) = 3\ln x - x$, να βρεις εφαπτομένη που είναι κάθετη στην $x + 2y - 6 = 0$

$$y = 2x - 3$$

2472. Δίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$, να βρεις τα σημεία όπου οι εφαπτομένες είναι $//xx'$



$$A(1, -1), B(3, -5)$$

2473. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$, να βρεις εφαπτομένες που άγονται από $A\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

2474. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{ax - b}{x + 1}$, $g(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$, να βρεις τα a, b ώστε να

δέχονται κοινή εφαπτομένη στο $x = 1$

$$a = \frac{1}{3}, b = 1$$

2475. Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η κλίση της εφαπτομένης στο 0 είναι 2, να βρεις το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} =$;

4

2476. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7, & x < 3 \\ 6x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$. Να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης στο 3.

$$y = 6x - 2$$

2477. Να βρεις τα a, b ώστε η ευθεία $y = ax + b$ να διέρχεται από το σημείο $M(1, 4)$ και να εφάπτεται της παραβολής $g(x) = x^2 + x + 2$

$$x_0 = 1, a = 3, b = 1$$

2478. Η εφαπτομένη της f στο 2 είναι η $y = 2x - 2$.

- Να βρεις τις τιμές $f(2), f'(2)$
- Αν η f είναι άρτια ποια η κλίση της εφαπτομένης της στο -2

$$2, 2, -2$$

2479. Να βρεις τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $f(x) = -x^2$, που άγονται από το σημείο $A(0, 1)$.

$$y = \pm 2x + 1$$

2480. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = -\frac{2}{x}$. Ν.δ.ο. σε ένα μόνο κοινό σημείο οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη.

2481. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = -x^2 - 2x$. Να βρεις την κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων

2482. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - x \ln x$, να βρεις την εφαπτομένη στο $x = 1$



2483. Δίνεται η $f(x) = x^2$, $\varepsilon: y = 2x - 2$, να βρεις την εφαπτομένη που είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

2484. Δίνεται η $f(x) = x^2$ και η εφαπτομένη της στο $A(1,1)$. Στην εφαπτομένη παίρνουμε το σημείο

$B: AB = 5$. Ν.δ.ο. το B είναι ψηλότερα από το A κατά $2\sqrt{5}$ μονάδες.

$$B(1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm 2\sqrt{5})$$

2485. Να βρεις τις εφαπτόμενες της $f(x) = x^2$ που άγονται από το σημείο $M(1, -3)$

2486. Δίνεται η $f: f'(0) = 1$, $g(x) = f(x-1) + 1$. Ν.δ.ο. η εφαπτομένη της f στο 0 εφάπτεται της g στο 1

$$y = x + f(0)$$

2487. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{a-x}$, $g(x) = -e^x$. Να βρεις το a ώστε η κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων να διέρχεται από το $A(1,0)$

2488. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(2+x) - f(2-x) = -2x$, ν.δ.ο. η εφαπτομένη της στο 2 είναι κάθετη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

2489. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: f^3(x) + 2g^2(x) = 10$, $g(1) = 1$, $g'(1) = -3$, να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο 1

$$y = x + 1$$

2490. Δίνονται $g, g(2) = 0$, $f(x) = (x-1)g(x)$, ν.δ.ο. έχουν κοινή εφαπτομένη.

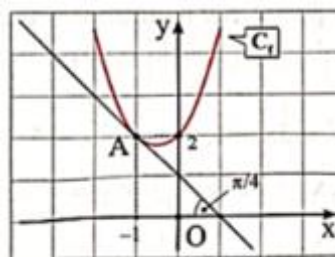
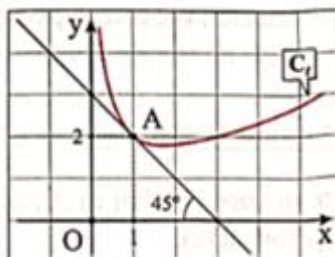
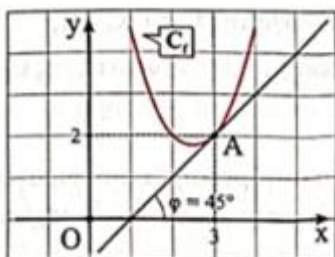
2491. Έστω οι συναρτήσεις $g, f(x) = (x^2 + 1)g(x) + 2$, $\varepsilon: y = 2x + 3$ η εφαπτομένη της g στο 1. Να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο 1

2492. Δίνεται η $f(x) = ax^2 + bx + 3$, να βρεις a, b ώστε η εφαπτομένη στο $M(1,5)$ να έχει κλίση 1

$$a = -1, b = 3$$

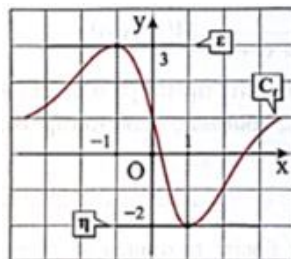
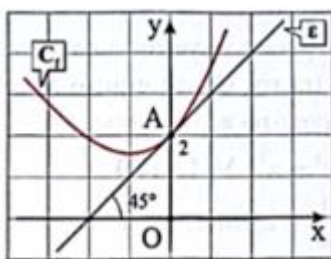
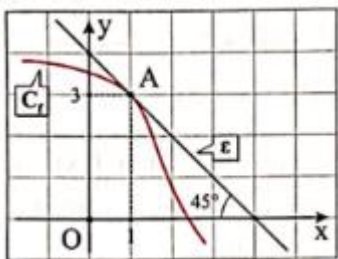
2493. Να βρεις a, b, γ ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = \gamma x - x^2$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $A(1,0)$

2494. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στις παρακάτω περιπτώσεις:





2495. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στις επόμενες περιπτώσεις:



2496. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^4 - 5x + 6$, $M(1, f(1))$
- $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, $M(0, f(0))$
- $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+3}$, $M(1, f(1))$
- $f(x) = x \ln x$, $M(e, f(e))$

2497. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$. Να βρείτε:

- την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$,
- το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

2498. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Να βρείτε:

- την $f'(x)$,
- τον συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$,
- την εξίσωση της εφαπτομένης στο A ,
- το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τους άξονες.

2499. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο M με τον άξονα $x'x$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^3 - x^2$, $M(1, f(1))$
- $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $M(1, f(1))$
- $f(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$, $M(1, f(1))$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $M(0, f(0))$

2500. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$ στο σημείο $M(1, f(1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2501. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f(x^3 - x + 1) = 3x^3 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε: την παράγωγο της f στο $x_0 = 1$,



- την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

2502. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(e^{-x}) = x^2 + 2x + 3$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

2503. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- $f(x) = e^x - x$
- $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$
- $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

2504. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία φ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1, \quad \varphi = 0^\circ$
- $f(x) = x^2 + 3x + 5, \quad \varphi = 45^\circ$
- $f(x) = x^2 + 5x - 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$
- $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad \varphi = 135^\circ$

2505. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$ και η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = 4x - 1$.

- Να βρείτε την f' και τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ) .

2506. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ) στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2 + 3x + 1, \quad (\epsilon): y = x + 5$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2, \quad (\epsilon): y = -3x + 1$

2507. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ) στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = 2x^2 + x + 1, \quad (\epsilon): y = \frac{1}{3}x + 5$
- $f(x) = 6x^2 + 2, \quad (\epsilon): -x + 9y + 18 = 0$
- $f(x) = x^3, \quad (\epsilon): x + 3y - 2 = 0$

2508. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.



- Να βρείτε το σημείο M , αν η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Ποια είναι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

2509. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Να βρείτε:

- την παράγωγο της f στο $x_0 = \alpha$,
- τις εφαπτομένες της C_f , οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(3, -4)$.

2510. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο A στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $A(-1, 1)$
- $f(x) = x^3 + 1$, $A(0, -1)$

2511. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$
- $f(x) = e^{-x}$
- $f(x) = \ln x$

2512. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f η οποία:

- είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση: $2x + y + 1 = 0$
- είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση: $x + 4y + 2 = 0$
- διέρχεται από το σημείο $A(5, -2)$.

2513. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:

- είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,
- είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 2004$,
- είναι κάθετη στην ευθεία $x + 8y + 1 = 0$,
- διέρχεται από το σημείο $A(6, -2)$.

2514. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της:

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

2515. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\epsilon): y = 3x - 5$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

2516. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(-1, 0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB εφάπτεται της C_f στο A .



- 2517.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(0, -f(\xi))$ εφάπτεται της C_f στο A .
- 2518.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση: $y = -4x + 4$ εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.
- 2519.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, -4)$.
 - Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη εφάπτεται και στη C_g .
- 2520.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(1) = 1$ και $g(x) = f(x^3 + x + 1) - 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.
 - Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.
 - Να αποδείξετε ότι η (ϵ) εφάπτεται της C_g στο σημείο $B(0, g(0))$.
- 2521.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + (\alpha + 1)x - \beta$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = 2x + 3$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(-1, 1)$.
- 2522.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$ Να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι, ώστε η C_f να εφάπτεται της ευθείας: (ϵ): $y = 3 - 5x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -1$.
- 2523.** Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x) = \alpha x + \frac{x-1}{x}$ στο σημείο της $A(1, 1)$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $g(x) = 2x^2 + (4\alpha + \beta)x + \alpha$
- 2524.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x}$
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
 - Να αποδείξετε ότι στο κοινό τους σημείο οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.
 - Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη.
- 2525.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ και $g(x) = \frac{x-8}{x}$
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .
 - Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα από τα δύο κοινά τους σημεία.
 - Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη.



2526. Να βρείτε τα $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \alpha x^2 + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{2}{x} \quad \text{να έχουν κοινό σημείο με κοινή εφαπτομένη.}$$

2527. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + \alpha x - 1$ και $g(x) = x^3 + x^2 + 2\alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

οι οποίες έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη. Να βρείτε:

- την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και το σημείο επαφής,
- την κοινή εφαπτομένη.

2528. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = x \ln x$ και $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$ να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, το οποίο βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

2529. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g , όπου $f(x) = 2x^2 + 2x$ και $g(x) = x^2 + 1$.

2530. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στις επόμενες περιπτώσεις:

- $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 - 7x + 16$
- $f(x) = 2x^2 - x + 2$, $g(x) = -x^2 - 3x + 3$

2531. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = -2x^2$$

2532. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρείτε την f' και την f'' .
- Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντιες εφαπτομένες και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(-1, f(-1))$.

2533. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.



- Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντιες εφαπτομένες.
- Να βρείτε το πρόσημο της f' .

2534. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 6\ln(x + 2)$ Να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού A της $f(x)$,
- τη συνάρτηση $f'(x)$,
- το πρόσημο της $f'(x)$,
- την κλίση της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$,
- τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον άξονα $x'x$.

2535. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{αν } x < 2 \\ \frac{4}{x} - 1, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.
- Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $M(2, 1)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2, 1)$.
- Να σχεδιάσετε τη C_f καθώς και την εφαπτομένη.

2536. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$

- Να βρείτε το κοινό σημείο των C_f, C_g .
- Να βρείτε για ποια x η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g .
- Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κάθετες εφαπτομένες.

2537. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο μεταβλητό σημείο της

$M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$, τέμνει τους άξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

- Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = \alpha$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M .
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B ως συνάρτηση του α .
- Να αποδείξετε ότι $(AM) = (MB)$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του α .



2538. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = \gamma$.
- Η συνάρτηση f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εφαπτομένη που είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$(\epsilon): y = 4x - 2$$

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = -6, \gamma = -4$.
- Να βρείτε την $f'(x)$.

2539. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

- Να βρείτε την f' .
- Να λύσετε την εξίσωση $f'(\theta) = 0$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- Να βρείτε τις οριζόντιες εφαπτομένες της C_f .

2540. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$ και το σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \neq 0$.

- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ στο σημείο M .
- Να αποδείξετε ότι η (ϵ) επανατέμνει τη C_f και σε ένα ακόμη σημείο N .
- Να αποδείξετε ότι η κλίση της f στο N είναι τετραπλάσια από την κλίση της f στο M .

2541. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \alpha x$ και το σημείο $M(1, f(1))$.

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) - f(x)f''(x) = 1$.
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M .
- Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2542. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$ άγονται κάθετες εφαπτομένες προς τη γραφική παράσταση της f .

2543. Δίνεται η παραβολή $(C): y = \frac{1}{2}x^2$. Να αποδείξετε ότι:



- από κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ με $2\beta < \alpha^2$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της παραβολής,
- αν το σημείο M ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$, τότε οι εφαπτομένες της (C) που διέρχονται από το M είναι κάθετες.

2544.

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι: $3f(x) - 2f(3-x) = x^2 + 12x - 18$
- Να βρείτε τον τύπο της f .
- Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες προς τη C_f , οι οποίες άγονται από το σημείο $K\left(1, -\frac{1}{4}\right)$, είναι κάθετες.



Προβλήματα μεγιστοποίησης και
ελαχιστοποίησης

2545. Μία βιομηχανία παράγει x μονάδες ενός προϊόντος το μήνα, με κόστος που δίνεται από τύπο $K(x) = 1000x - 100$ ευρώ. Η τιμή πώλησης κάθε μονάδας είναι $5000 - 2x$ ευρώ. Να βρεις την ποσότητα που πρέπει να παράγει η βιομηχανία για μέγιστο κέρδος

1000

2546. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς που το γινόμενο τους είναι ίσο με 16 και το άθροισμά τους ελάχιστο

4, 4

2547. Να βρεις το σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x + 1$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $A(1,1)$

$x = 0$

2548. Να βρεις την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5, g(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 15$$

4

2549. Να βρεις την ευθεία που διέρχεται από $A(2,4)$ και σχηματίζει με θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδό

$\lambda = -2$

2550. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 10. Να βρεις τα μήκη των κάθετων πλευρών του ώστε το τρίγωνο να έχει μέγιστο εμβαδό και αντίστοιχα για μέγιστη περίμετρο

$5\sqrt{2}$

2551. Με συρματοπλέγμα μήκους 100 μέτρων θα περιφράξουμε περιοχή σχήματος κυκλικού τομέα ακτίνας ρ και γωνίας ϕ . Να βρεις διαστάσεις ώστε να περιφράξουμε το μέγιστο εμβαδό.

25

2552. Κυκλικός τομέας ακτίνας ρ έχει περίμετρο 12μ . Να βρεις

- την τιμή του ρ για την οποία το εμβαδό του τομέα γίνεται μέγιστο.
- την κεντρική γωνία.

$3, \frac{360}{\pi}$



2553. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο γήπεδο με μία ημικυκλική περιοχή σε κάθε άκρο. Μία πίστα δρόμου 400 μ. Θα αποτελέσει την περίμετρο του γηπέδου. Βρείτε τις διαστάσεις του γηπέδου ώστε το ορθογώνιο μέρος να έχει το μέγιστο εμβαδό.

$$\frac{100}{\pi}$$

2554. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Να βρεις το σημείο M της γραφικής παράστασης που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

$$(4, 2)$$

2555. Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος $\alpha=6$, $\beta=8$. Ποια η τιμή της περιεχόμενης γωνίας ώστε να έχουμε μέγιστο εμβαδό για το τρίγωνο.

$$\frac{\pi}{2}$$

2556. Ένα ανοιχτό από πάνω κυλινδρικό δοχείο έχει σταθερό εμβαδό E. Να βρεις τη σχέση μεταξύ ύψους h του δοχείου και της ακτίνας R της βάσης του για την οποία το δοχείο έχει τον μέγιστο όγκο.

2557. Η ταχύτητα μιας αντίδρασης δίνεται από τον τύπο $u = k(a-x)x^2$, όπου α η αρχική ποσότητα σε mole, x η ποσότητα και k η σταθερά ταχύτητας. Για ποιες τιμές του x η ταχύτητα γίνεται μέγιστη.

$$\frac{2}{3}a$$

2558. Ένα ορθογώνιο διαστάσεων x, y με περίμετρο 36, περιστρέφεται γύρω από την πλευρά y και γράφει κύλινδρο. Ποιες οι διαστάσεις ώστε ο κύλινδρος να έχει μέγιστο όγκο.

$$12$$

2559. Αν x, y τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $2\sqrt{5}$, να βρεις τη μέγιστη τιμή της περιμέτρου πολυγώνου που είναι $2x + y$

$$4$$

2560. Το Σεπτέμβρη αποθηκεύω το κρασί μου σε κυλινδρικά δοχεία χωρητικότητας 1 lt. Ποιες οι διαστάσεις των δοχείων για να έχουν τη μικρότερη δυνατή επιφάνεια

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

2561. Σύρμα μήκους 10m κόβεται σε δύο κομμάτια. Το ένα λυγίζεται και σχηματίζεται τετράγωνο, ενώ με το άλλο σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο. Πως να κοπεί το σύρμα ώστε το άθροισμα των επιφανειών να είναι ελάχιστο.





2562. Πρόκειται να κατασκευάσω μία αφίσα διαφημιστική για τα γραφεία που να περιέχει 50cm^2 τυπωμένη ύλη και περιθώρια 4cm το καθένα πάνω και κάτω και 2cm στις πλευρές. Ποιες οι διαστάσεις της αφίσας, ώστε να χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χαρτί.

9,18

2563. Σ ένα τριγωνικό οικόπεδο $AB\Gamma$ η πλευρά $B\Gamma=100$ και απέχει από την κορυφή A απόσταση 60 . Πρόκειται να κτιστεί σ αυτό το μεγαλύτερο δυνατό οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρεις τις διαστάσεις του και την ακριβή του θέση. (Γίνεται πιο εύκολο αν θεωρήσεις το $AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB=A\Gamma$)).
2564. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2$, $B\Gamma=6$ όπου το A είναι το σπίτι μας και Γ το σχολείο μας. Επίσης το $B\Gamma$ παριστάνει ένα κανάλι νερού το οποίο το χειμώνα παγώνει και πρέπει να το διασχίσουμε για να φτάσουμε από το σπίτι στο σχολείο. Περπατάμε με ταχύτητα 8 και πατινάρουμε με ταχύτητα 4 . Να βρεις τον ελάχιστο χρόνο για το σχολείο.

2565. Ο πληθυσμός μιας πόλης ύστερα από t έτη θα είναι $f(t) = 80 - \frac{11}{t+1}$ χιλιάδες κάτοικοι.

- Ποιος είναι σήμερα ο πληθυσμός της πόλης και ποιος θα είναι ύστερα από 10 χρόνια.
- Τι θα συμβεί στον πληθυσμό ύστερα από πολλά έτη.
- Πόσο θα μεταβληθεί ο πληθυσμός κατά το 5° και 6° έτος από σήμερα.
- Ο πληθυσμός θα αυξάνεται ή θα μειώνεται



2566. Ένας πεζοπόρος ξεκινά από τους Αγίους στις 7 το πρωί και φτάνει στο Ρέντη στις 11 . Μια άλλη μέρα ξεκινά τη διαδρομή από Ρέντη στις 7 και φτάνει Αγίους στις 11 . Ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο του δρόμου μεταξύ των Αγίων και Ρέντη στο οποίο θα βρεθεί την ίδια ώρα και τις δύο μέρες

2567. Μια εταιρεία κατασκευάζει κυλινδρικά δοχεία που είναι κλειστά και από τις δύο βάσεις. Κάθε δοχείο κατασκευάζεται από φύλλο λαμαρίνας εμβαδού 150π . Να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.

$$R=5, h=10$$

2568. Ο ρυθμός μεταβολής ως προς το χρόνο t του πληθυσμού μιας πόλης είναι ανάλογος του πληθυσμού. Αν σήμερα είναι 10000 κάτοικοι και ύστερα από 5 χρόνια 12000 , ποιος ο πληθυσμός σε 10 χρόνια.

$$f(t) = ce^{kt}$$

2569. Παρατηρήθηκε ότι όταν μια σφαίρα χτυπήσει ένα σώμα τότε η επιβράδυνσή της είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της ταχύτητας. Να βρεις το χρόνο που χρειάζεται για να σταματήσει η σφαίρα αν γνωρίζεις ότι τη στιγμή της εισόδου στο σώμα η ταχύτητά της είναι 100 .

20



2570. Ο ρυθμός με τον οποίο δύνει ο ήλιος τη χρονική στιγμή που οι ακτίνες του με το έδαφος σχηματίζουν γωνία 60° είναι 19° ανά ώρα .Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της σκιάς του Λευκού Πύργου ύψους 33 μέτρων την ίδια χρονική στιγμή .

2571. Κήπος έχει σχήμα κυκλικού τομέα με μήκος 100 και ακτίνα χ .Να βρεις το χ ώστε να έχουμε μέγιστο εμβαδό

25

2572. Αρχιτέκτονας σκέφτεται σε τοίχο να κατασκευάσει παράθυρο σχήματος ορθογωνίου περιμέτρου 6 μέτρων . Όμως το σπίτι είναι σε παραδοσιακό οικισμό οπότε αποφασίζει να προσθέσει από πάνω του ένα ημικύκλιο χωρίς όμως να μεταβάλει τη συνολική περίμετρο του παραθύρου , λόγω έλλειψης υλικών . Να βρεις τις διαστάσεις που θα πρέπει να έχει το παράθυρο ώστε να μπαίνει το μέγιστο δυνατό φως .

2573. Σε δοσμένο ημικύκλιο διαμέτρου $AB=2R$, να εγγράψεις ισοσκελές τραπέζιο με μεγάλη βάση την AB έτσι ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδό .

2574. Η τιμή πώλησης ενός προϊόντος μειώνεται συνεχώς με ρυθμό ανάλογο της τιμής του . Η τιμή σήμερα είναι 100000 ενώ ύστερα από 5 έτη είναι 90000 .Να βρεις την τιμή ύστερα από 10 χρόνια .

$$f(t) = ce^{-kt}$$

2575. Ένα κομμάτι πάγου γλιστρά σε κατηφορικό δρόμο μήκους 20 μέτρων με επιτάχυνση 2. Να βρεις την αρχική ταχύτητα και την τελική ταχύτητα του πάγου . Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο τέλος του δρόμου .

2576. Ένας γεωργός φυτεύει 60 δέντρα σε κάθε στρέμμα και κάθε δέντρο του αποδίδει κατά μέσο όρο 40 κιλά φρούτα .Αποφασίζει να φυτέψει μερικά δέντρα ακόμα γνωρίζοντας ότι για κάθε επιπλέον δέντρο στο στρέμμα η απόδοση του δέντρου μειώνεται κατά μισό κιλό .Πόσα δέντρα να φυτέψει για να έχει τη μέγιστη απόδοση .

2577. Ένα πλοίο Π_1 βρίσκεται 50 μίλια ανατολικά ενός πλοίου Π_2 .Το Π_1 πλέει δυτικά με ταχύτητα 15 ενώ το Π_2 πλέει νότια με ταχύτητα 20 .Να υπολογίσεις την απόσταση των πλοίων σε t ώρες .Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των πλοίων σε μισή ώρα .Σε πόσο χρόνο η απόστασή τους γίνεται ελάχιστη και να εξετάσεις αν το ένα πλοίο βλέπει το άλλο αν η ορατότητα στην περιοχή είναι στα 37 μίλια .

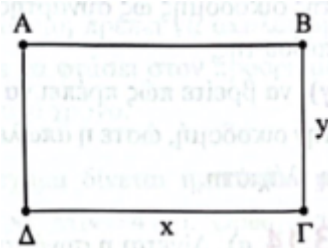
2578. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος έχει διαστάσεις x και y . Το εμβαδόν του είναι 900 m^2 .

- Να αποδείξετε ότι η περίμετρός του δίνεται από τη σχέση

$$P(x) = \frac{1800}{x} + 2x, x > 0.$$

- Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, ώστε η περίμετρός του να είναι η ελάχιστη δυνατή.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με 120 m.





- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 60x - x^2$, $0 < x < 60$
- Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, ώστε το εμβαδόν του να είναι το μέγιστο δυνατό.

2579. Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 m. Αν το μήκος του είναι x m:

- να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο:
 $E(x) = -x^2 + 200x$
- να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν γίνεται μέγιστο,
- να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

2580. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει τις τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου χωραφιού με εμβαδόν 800 m^2 , το οποίο από τη μια πλευρά συνορεύει με ένα ποτάμι.

- Να κατασκευάσετε μια συνάρτηση η οποία να δίνει την περίμετρο του χωραφιού που πρόκειται να περιφραχτεί.
- Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του χωραφιού, ώστε τα έξοδα περίφραξης να είναι ελάχιστα;
- Πόσο είναι στην περίπτωση αυτή το συνολικό μήκος της περίφραξης;

2581. Από τις τέσσερις γωνίες ενός κομματιού λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου με πλευρά $a = 6 \text{ m}$ πρόκειται να κοπούν τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x , ώστε να προκύψει με αναδίπλωση ένα κουτί.

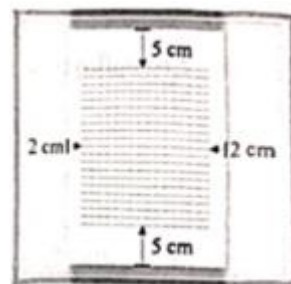
- Να αποδείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού δίνεται από τη σχέση
 $V(x) = x(6 - 2x)^2$, $x \in (0,3)$.
- Να βρείτε την τιμή του x , ώστε ο όγκος να είναι ο μέγιστος δυνατός.



2582. Ένας εκδότης θέλει σε κάθε σελίδα του νέου βιβλίου Μαθηματικών που εκδίδει το κείμενο να καλύπτει συνολικά 360 cm^2 . Θέλει ακόμα τα περιθώρια της σελίδας να είναι

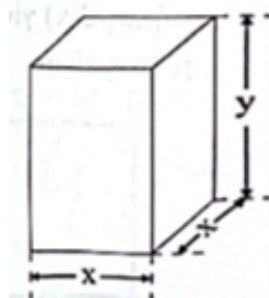
5 cm επάνω και κάτω και 2 cm δεξιά και αριστερά. Να βρείτε:

- τις διαστάσεις της σελίδας ως συνάρτηση των διαστάσεων του κειμένου,
- μια συνάρτηση η οποία να δίνει την επιφάνεια της σελίδας ως συνάρτηση του πλάτους του κειμένου,
- ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της σελίδας έτσι, ώστε αυτή να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.





2583. Μια οικοδομή με όγκο 1500 m^3 έχει δάπεδο και οροφή σχήματος τετραγώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η απώλεια θερμότητας ανά m^2 από την οροφή είναι τριπλάσια απ' αυτή των τοίχων. Αν από το δάπεδο δεν υπάρχει απώλεια θερμότητας, τότε:

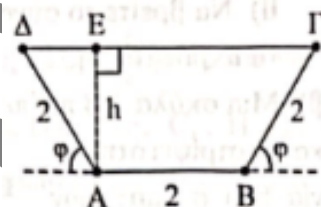


- να εκφράσετε το ύψος της οικοδομής ως συνάρτηση της πλευράς της βάσης της,
- να εκφράσετε τη συνολική απώλεια θερμότητας της οικοδομής ως συνάρτηση της πλευράς του δαπέδου της,
- να βρείτε πώς πρέπει να σχεδιάσει ο μηχανικός την οικοδομή, ώστε η απώλεια θερμότητας να είναι η ελάχιστη.

2584. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)$, $x \in [0, \pi]$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

Η κάθετη διατομή ενός καναλιού είναι ισοσκελές τραπέζιο, του οποίου οι τρεις πλευρές έχουν μήκος $a = 2 \text{ m}$.

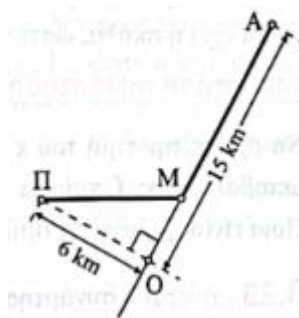


- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τη σχέση:

$$E(\varphi) = 4\eta\mu\varphi(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi), \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

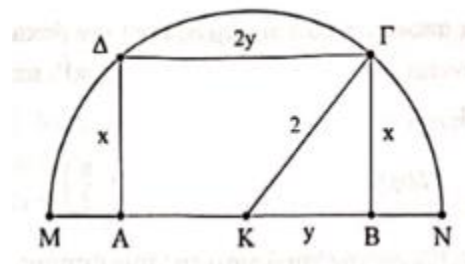
- Να βρείτε τη γωνία φ , ώστε το κανάλι να μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού.

2585. Ένας ποδηλάτης P βρίσκεται σε μια άγονη αγροτική περιοχή, όπου ο πλησιέστερος δρόμος απέχει 6 km . Ο ποδηλάτης επιθυμεί να μεταβεί σε μια πόλη A , η οποία βρίσκεται 15 km από το πλησιέστερο προς αυτόν σημείο του δρόμου O . Αν στο ανώμαλο έδαφος των αγρών ο ποδηλάτης μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα 8 km/h και στον δρόμο ταχύτητα 10 km/h , τότε:



- να εκφράσετε τον χρόνο που απαιτείται για τη διαδρομή PMA ως συνάρτηση του $OM = x$, όπου M είναι το σημείο στο οποίο ο ποδηλάτης συναντά τον δρόμο μετά τη διαδρομή PM μέσα στους αγρούς,
- να βρείτε ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει ο ποδηλάτης, ώστε να φτάσει στον προορισμό του στον λιγότερο δυνατό χρόνο.

2586. Στο επόμενο σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο $MN = 4 \text{ cm}$. Ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $x \text{ cm}$ και $2y \text{ cm}$ είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , είναι: $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0, 2)$



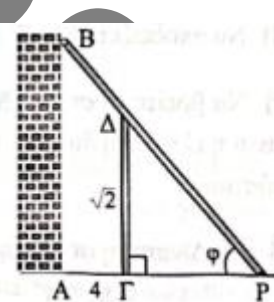
- Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.
- Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ να είναι ίσο με $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2587. Έστω ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα απ' αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και με το υπόλοιπο έναν κύκλο.

- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τη σχέση: $E(x) = \frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x \in (0,8)$
- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών να είναι ίσο με 5 m^2 .

2588. Ένας τοίχος AB πρόκειται να στηριχθεί με ένα δοκάρι BP . Για να μη λυγίσει όμως το δοκάρι, αυτό θα στηρίζεται και από τη μεταλλική δοκό $\Gamma\Delta = \sqrt{2} \text{ m}$, η οποία απέχει 4 m από τον τοίχο.

- Να αποδείξετε ότι το μήκος $\delta(\varphi)$ του δοκαριού BP δίνεται συναρτήσει της γωνίας $\varphi = \hat{P}$ από τη σχέση:
- $$\delta(\varphi) = \frac{4}{\sin\varphi} + \frac{\sqrt{2}}{\eta\mu\varphi}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\delta(\varphi)$ και να αποδείξετε ότι για τη μοναδική ρίζα φ_0 της $\delta'(\varphi)$ ισχύει ότι $\epsilon\varphi\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - Να αποδείξετε ότι το ελάχιστο μήκος του δοκαριού είναι ίσο με $3\sqrt{6} \text{ m}$.

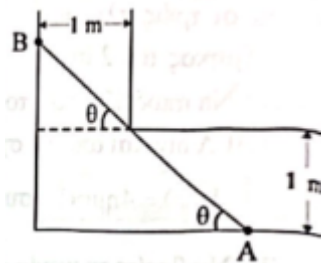


2589. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sin x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , καθώς και τα ακρότατα της f .

Μια σκάλα AB πρέπει να μεταφερθεί οριζόντια και να στρίψει στη γωνία που σχηματίζουν δύο κάθετα τεμνόμενοι διάδρομοι πλάτους ενός μέτρου ο καθένας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να αποδείξετε ότι το μήκος της σκάλας AB είναι ίσο με $f(\theta)$.
- Να βρείτε το μεγαλύτερο μήκος που μπορεί να έχει η σκάλα, ώστε να μπορέσει να στρίψει.



2590. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1$ και η ευθεία $(\epsilon): y = 2x - 5$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη με την ευθεία (ϵ) .



- Να βρείτε σημείο $M(\alpha, \beta)$ της ευθείας (ϵ) που απέχει από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη δυνατή απόσταση.

2591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 3$ και ένα σημείο της $M(\alpha, \beta)$.

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση d του σημείου M από την αρχή των αξόνων είναι ίση με:

$$d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 3)^2}$$

- Να αποδείξετε ότι $d'(\alpha) = \frac{(\alpha-1)(2\alpha^2-7\alpha+9)}{d(\alpha)}$
- Να βρείτε το σημείο M , ώστε η απόσταση d να είναι η ελάχιστη δυνατή.
- Πόση είναι η ελάχιστη απόσταση;

2592. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

- Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του.
- Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του;

2593. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$ Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x, f(x))$ είναι η μέγιστη δυνατή.

2594. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, ένα σημείο της γραφικής της παράστασης $M(x, \sqrt{x})$ με $x > 0$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

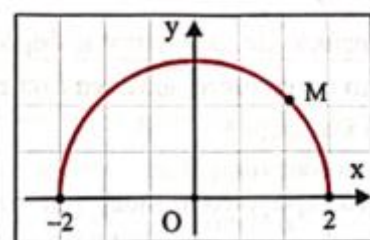
- Να υπολογίσετε την απόσταση AM ως συνάρτηση του x .
- Να βρείτε την τιμή του x , ώστε η απόσταση AM να είναι ελάχιστη.
- Για την παραπάνω τιμή του x να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M ,
- τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M με την ευθεία AM .

2595. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x > 0$ και το μεταβλητό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της C_f . Η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο M τέμνει τους άξονες Ox, Oy στα σημεία A, B αντίστοιχα.

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) , καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων A και B ως συνάρτηση του α .
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O είναι η αρχή των αξόνων, είναι σταθερό.
- Έστω Γ, Δ οι προβολές του σημείου M στους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου $O\Gamma M\Delta$ να είναι ελάχιστη. (Θέμα εξετάσεων)

2596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την $f'(x)$, $x \in (-2, 2)$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{4 - x^2}$ είναι το ημικύκλιο του παρακάτω σχήματος.





Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, κινείται στο παραπάνω ημικύκλιο. Έστω A, B οι προβολές του M στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $MAOB$ είναι ίσο με $f(\alpha)$, $\alpha > 0$.
- Να βρείτε το σημείο M , ώστε το εμβαδόν ($MAOB$) να είναι το μέγιστο δυνατό.

2597. Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 20 \left(2000 - \frac{250}{t} - t^2 \right) \text{ όπου } t \text{ είναι ο χρόνος σε ώρες που χρειάζεται για την κατασκευή του.}$$

- Πόσος χρόνος απαιτείται για την κατασκευή ενός αυτοκινήτου, ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο;
- Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος από την πώληση του αυτοκινήτου;

2598. Οι παρακάτω σχέσεις: $K(t) = 30t^2$ και $E(t) = 30 \left(100 - \frac{250}{t} \right)$ δίνουν αντίστοιχα το κόστος κατασκευής ενός αεροπλάνου και την τιμή πώλησής του σε χιλιάδες ευρώ, όπου t είναι ο χρόνος (σε μήνες) που απαιτείται για την κατασκευή του.

- Να βρείτε το κέρδος από την πώληση ενός αεροπλάνου ως συνάρτηση του χρόνου t .
- Πόσοι μήνες απαιτούνται για την κατασκευή ενός αεροπλάνου έτσι, ώστε το κέρδος από την πώλησή του να είναι μέγιστο;
- Να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος.

2599. Σ' ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζονται, μεταξύ άλλων, ταψάκια με γαλακτομπούρεκο. Το συνολικό κόστος παραγωγής x ταψιών με γαλακτομπούρεκο την εβδομάδα ανέρχεται περίπου στα $\left(\frac{x^2}{4} + 25x + 25 \right)$ λεπτά (cents) και η τιμή πώλησης στα $\left(1000 - \frac{x}{2} \right)$ λεπτά (cents) το ένα.

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους $P(x)$ είναι: $P(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 975x - 25$, $0 \leq x \leq 2000$
- Πόσα ταψάκια με γλυκό την εβδομάδα πρέπει να παράγει το εργοστάσιο, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

2600. Για να πραγματοποιηθεί μια αεροπορική πτήση απαιτείται η συμμετοχή 100 τουλάχιστον ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχή ακριβώς 100 άτομα, το εισιτήριο ανέρχεται σε 1000 € το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο του εισιτηρίου μειώνεται κατά 5 €. Αν επιπλέον των 100 ατόμων δηλώσουν συμμετοχή x άτομα, τότε:

- να βρείτε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση του x ,
- να εκφράσετε τα έσοδα από την πτήση ως συνάρτηση του x ,

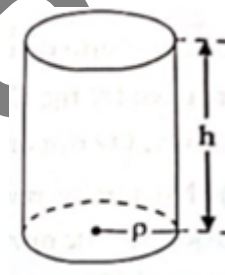


- να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλονται τα έσοδα, αν κάποια στιγμή έχουν δηλώσει συμμετοχή 120 άτομα,
- να βρείτε το πλήθος των ατόμων που θα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε η εταιρεία να έχει τα μέγιστα έσοδα.

2601. Μια αεροπορική εταιρεία εκτιμά ότι αν το εισιτήριο προς μια πόλη είναι 300 €, τότε θα μεταφέρει 5000 επιβάτες τον χρόνο. Αν για κάθε αύξηση 100 €, πέρα από τα 300 €, χάνει 1000 πελάτες τον χρόνο, τότε:

- να εκφράσετε τα έσοδα της εταιρείας ως συνάρτηση της διαφοράς x του εισιτηρίου από τα 300 €,
- να βρείτε ποια πρέπει να είναι η τιμή του εισιτηρίου έτσι, ώστε η εταιρεία να επιτύχει μεγιστοποίηση των εσόδων της,
- να βρείτε ποια είναι τα μέγιστα έσοδα της εταιρείας.

2602. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει τροφές για σκύλους. Η συσκευασία τους γίνεται σε κυλινδρικά δοχεία συνολικού όγκου $128\pi \text{ cm}^3$. Το εργοστάσιο επιθυμεί να έχει την οικονομικότερη συσκευασία και για τον λόγο αυτόν αναθέτει στους τεχνικούς του να ελαχιστοποιήσουν την επιφάνεια του μετάλλου που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή καθενός κουτιού.



- Να εκφράσετε την επιφάνεια του κυλινδρικού κουτιού ως συνάρτηση της ακτίνας της κυκλικής βάσης του.
- Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού έτσι, ώστε αυτό να έχει το ελάχιστο κόστος κατασκευής.
- Ποια είναι η ελάχιστη επιφάνεια που μπορεί να έχει το κάθε κουτί;

2603. Ένα μεγάλο τυπογραφείο έχει αναλάβει να εκτυπώσει 100 χιλιάδες πανομοιότυπες αφίσες. Για τον σκοπό αυτόν ενοικιάζει μηχανές, που η καθεμία εκτυπώνει 100 αφίσες την ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης της κάθε μηχανής ανέρχονται σε 100 €. Επιπλέον το τυπογραφείο για κάθε ώρα εκτύπωσης έχει πρόσθετα έξοδα 10 €.

- Να εκφράσετε τα συνολικά έξοδα εκτύπωσης ως συνάρτηση του αριθμού των εκτυπωτικών μηχανών που θα χρησιμοποιηθούν.
- Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία, ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος.
- Ποιο είναι το ελάχιστο αυτό δυνατό κόστος;

2604. Μια βιοτεχνία θέλει να ετοιμάσει μια παραγγελία από 500 πουκάμισα σε μία ημέρα. Για τον λόγο αυτόν θα προσλάβει εργάτες, οι οποίοι ράβουν 5 πουκάμισα την ώρα και θα αμείβονται με 10 € την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των εργατών ο βιοτέχνης θα προσλάβει και έναν επιστάτη, τον οποίο θα πληρώνει 20 € την ώρα. Ο εργοδότης θα πληρώσει επιπλέον στο ΙΚΑ 20 € την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένου και του επιστάτη.



- Να εκφράσετε το κόστος της εκτέλεσης της παραγγελίας ως συνάρτηση του αριθμού των εργατών που θα προσληφθούν.
- Πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο εργοδότης, ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;
- Ποιο είναι το ελάχιστο αυτό κόστος;
- Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι εργάτες, πέραν του οκταώρου, ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

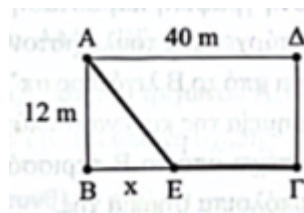
2605. Ένα λεωφορείο καταναλώνει καύσιμα αξίας $\frac{v^2}{400}$ ευρώ/h, όπου v είναι η ταχύτητά του σε km/h. Αν τα υπόλοιπα έξοδα ανέρχονται συνολικά σε 16 ευρώ την ώρα, να βρείτε:

- το κόστος της διαδρομής ως συνάρτηση της ταχύτητας του λεωφορείου για μια απόσταση 540 km,
- ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του λεωφορείου έτσι, ώστε μια διαδρομή 540 km να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος,
- το ελάχιστο δυνατό κόστος.

2606. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 13\sqrt{x^2 + 144} + 5(40 - x)$, $x \geq 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , καθώς και το πρόσημό της.

Ένας μηχανικός θέλει να χαράξει τη διαδρομή AEG στο ορθογώνιο οικόπεδο $ABΓΔ$ του σχήματος, για να περάσει από αυτήν ένα καλώδιο της ΔΕΗ. Η τοποθέτηση κοστίζει 13 € το μέτρο για το τμήμα AE του καλωδίου και 5 € το μέτρο για το τμήμα EG .



- Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει το κόστος της τοποθέτησης του καλωδίου για τη διαδρομή AEG .
- Να βρείτε τη θέση του σημείου E για την οποία το κόστος αυτής της τοποθέτησης είναι ελάχιστο, καθώς και το ελάχιστο κόστος της εγκατάστασης του καλωδίου κατά μήκος της διαδρομής AEG .

2607. Η θερμότητα η οποία φτάνει σ' ένα σημείο που απέχει r m από ένα θερμαντικό σώμα, δίνεται από τη σχέση $\theta(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, όπου α είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τον τρόπο κατασκευής του σώματος. Δύο τέτοια όμοια θερμαντικά σώματα A και B απέχουν μεταξύ τους απόσταση 4 m. Μια γάτα κάθεται σ' ένα σημείο Γ του τμήματος AB .

- Να εκφράσετε την ποσότητα θερμότητας που δέχεται η γάτα από τα δύο σώματα ως συνάρτηση της απόστασής της από το ένα σώμα.
- Να βρείτε την πιο δροσερή θέση στην οποία μπορεί να σταθεί η γάτα.

2608. Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12.500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και επιστασία των εργατών



ο αγρότης θα προσλάβει και έναν επιστάτη, τον οποίο θα πληρώνει 10 ευρώ την ώρα. Ο αγρότης, επιπλέον, θα πληρώσει στο σωματείο των εργατών εισφορά 10 ευρώ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη. Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης, για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος.

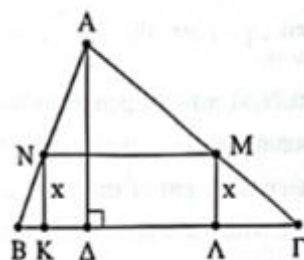
2609. Σ' ένα βαθμολογικό κέντρο φτάνουν 1600 γραπτά θετικής κατεύθυνσης. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 2 €. Τη διόρθωση συντονίζει ένας σχολικός σύμβουλος που αμείβεται με 20 € την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών κάθε βαθμολογητής παίρνει επιπλέον ως επίδομα 40 €, ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

- Να αποδειχθεί ότι το κόστος $K(x)$ για τη διόρθωση όλων των γραπτών δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 40 \left(x + \frac{16}{x} + 160 \right)$$
 όπου x είναι ο αριθμός των διορθωτών στο βαθμολογικό κέντρο.
- Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;
- Να βρεθεί το ελάχιστο αυτό κόστος και η συνολική διάρκεια διόρθωσης των γραπτών.

2610. Ένα ορθογώνιο $KLMN$ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση: $B\Gamma = 10$ cm και ύψος $AD = 5$ cm.

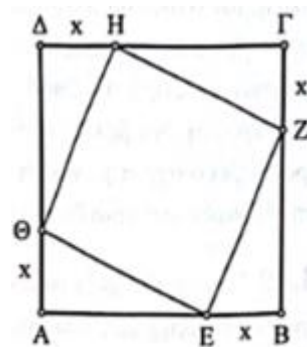
- Να αποδείξετε ότι $MN = 10 - 2x$, $0 < x < 5$.
- Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του $KLMN$ είναι ίση με $\Pi(x) = 20 - 2x$.
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του $KLMN$ είναι ίσο με $E(x) = -2x^2 + 10x$.
- Να βρείτε την τιμή του x , καθώς και τη θέση του σημείου N , ώστε το εμβαδόν του $KLMN$ να είναι το μέγιστο δυνατό.
- Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\Pi(x)$ και $E(x)$.



2611. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά: $a = 2$ cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$, τότε:

- να εκφράσετε την πλευρά EZ ως συνάρτηση του x ,
- να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad x \in [0, 2]$$
- να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο,





- να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ να ισούται με $(4e^{x_0} + 1) \text{ cm}^2$.

2612. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,9]$ κι ένα σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής της παράστασης.

- Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ την ελάχιστη δυνατή απόσταση. Στη συνέχεια να βρείτε την απόσταση αυτή.
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M , που βρήκατε στο ερώτημα (α), είναι κάθετη στην AM .

Δίνεται το σημείο $B(\alpha, \beta)$ το οποίο δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το B λιγότερο απ' ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το B περισσότερο απ' ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

2613. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\theta) = 4(1 + \sin\theta)\eta\mu\theta$, $\theta \in [0, \pi]$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και το σύνολο τιμών της.

Ένα αρδευτικό κανάλι του Θεσσαλικού κάμπου έχει κάθετη διατομή ισοσκελούς τραπεζίου $\Gamma A B \Delta$ με μικρή βάση AB (που είναι και η βάση του καναλιού), μη παράλληλες πλευρές $A\Gamma, B\Delta$ και: $AB = A\Gamma = B\Delta = 2$ Να αποδείξετε ότι:

- Το εμβαδόν $E(\theta)$ του τραπεζίου $\Gamma A B \Delta$ ως συνάρτηση της γωνίας $\theta = \widehat{A\Gamma\Delta}$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\theta) = 4(1 + \sin\theta)\eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$
- Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ , ώστε το κανάλι να μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού.
- να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, ώστε το $E(\theta)$ να είναι το μέγιστο δυνατό,
- να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$, ώστε: $E(\theta) = \frac{3}{4}$
- για τις γωνίες θ_1, θ_2 του ερωτήματος (γ) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$



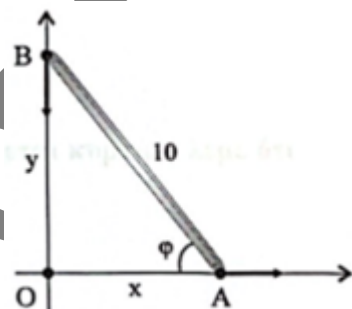
2614. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$ m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $AM \perp B\Gamma$, τότε:

- να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας θ δίνεται από τη σχέση: $E(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$
- Να βρεις τη γωνία ώστε το εμβαδόν να γίνεται μέγιστο



2615. Μια σκάλα AB με μήκος 10 m είναι στερεωμένη όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το κάτω άκρο A απομακρύνεται από το σημείο O με ταχύτητα 4 m/s. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το B απέχει 8 m από το σημείο O .

- Να βρείτε μια σχέση που να δίνει το y ως συνάρτηση του x και στη συνέχεια να βρείτε το $x(t_0)$.
- Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το B πλησιάζει το σημείο O τη χρονική στιγμή $t = t_0$.
- Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του x .



Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς:

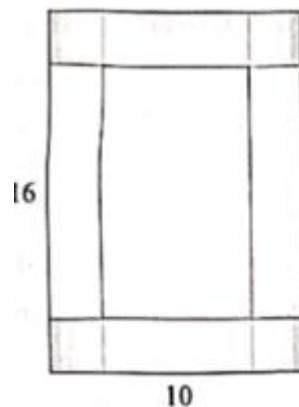
- x
- t
- Να βρείτε το $E'(t_0)$. στ) Αν $\widehat{OAB} = \varphi$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ τη χρονική στιγμή $t = t_0$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ είναι το μέγιστο δυνατό.

2616. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 13x^2 + 40x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Σε μια ορθογώνια λαμαρίνα διαστάσεων 10×16 κόβουμε από τις γωνίες της τέσσερα ίσα τετράγωνα. Τα πλευρικά τμήματα της λαμαρίνας τα διπλώνουμε και παίρνουμε ένα κουτί, ανοιγμένο στο πάνω μέρος.

- Να αποδείξετε ότι ο όγκος του κουτιού δίνεται από τη συνάρτηση $g(x) = 4f(x)$, όπου x είναι το ύψος του κουτιού με $0 < x < 5$.
- Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού που έχει τον μέγιστο όγκο.





Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης

Ρυθμός μεταβολής της $f(x)$: απλή παραγωγή της $f(x)$
 Ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ τη χρονική στιγμή όπου ... : σύνθετη παραγωγή της f όπου το x είναι συνάρτηση του t , τότε
 $f'(x(t)) = f'(x) \cdot x'(t)$

Ρυθμός μεταβολής σε τρίγωνο : Δημιουργούμε γεωμετρική σχέση με τη βοήθεια Πυθαγορείου Θεός (τρίγωνο μόνο του) ή όμοια τρίγωνα (τρίγωνο μέσα σε τρίγωνο) . Τη σχέση τη χρησιμοποιούμε με 2 τρόπους : τη μία φορά υπολογίζω ότι λείπει και τη δεύτερη παραγωγίζω τη σχέση

Ρυθμός μεταβολής γωνίας : Υπολόγισε κάποιον από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς σε ορθογώνιο τρίγωνο για να μπορείς να παραγωγίσεις .

2617. Πλευρά ενός τετραγώνου αυξάνεται

όταν αυτό ισούται με 16

16

2618. Δίνεται ορθογώνιο με εμβαδό 50 , αν το μήκος ελαττώνεται με ρυθμό $2 \frac{cm}{sec}$, να βρεις το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του όταν το μήκος είναι 5

4

2619. Σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνει και η ακτίνα του δίνεται από τύπο $r = 3t^2 - t$. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας και του όγκου του μπαλονιού τη χρονική στιγμή 2

$880\pi, 4400\pi$

2620. Επιφάνεια σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $64 \frac{cm^2}{sec}$, να βρεις το ρυθμό αύξησης του όγκου σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι 4

128

2621. Το κόστος κατασκευής x τεμαχίων ενός προϊόντος είναι $-5x^2 + 500x + 100$ χιλιάδες ευρώ ενώ τα έσοδα από την πώληση x τεμαχίων είναι $-x^3 + 100x^2 - 2500x - 150$ χιλιάδες ευρώ . Να βρεις το πλήθος των τεμαχίων ώστε ο ρυθμός κέρδους να είναι θετικός .

$[20, 50]$

2622. Αερόστατο ξεκινά από το σημείο K και ανέρχεται κατακόρυφα με ταχύτητα $20 \frac{m}{min}$. Ένας

άνθρωπος βρίσκεται σε απόσταση 30 μέτρα από το K . Να βρεις την ταχύτητα απομάκρυνσης του αερόστατου από τον άνθρωπο 2 λεπτά μετά την έναρξη της κατακόρυφης κίνησης .

16



2623. Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι, το ένα κινείται Βόρεια με ταχύτητα 30 μίλια την ώρα και το άλλο Ανατολικά με ταχύτητα 40 . Ν.δ.ο. η μεταξύ τους απόσταση μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό

50

2624. Μία σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει και η επιφάνειά της μειώνεται με ρυθμό 0,8 τ.ε/λεπτό. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της διαμέτρου της μπάλας, τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της ισούται με 25 εκ.

$$-\frac{0,2}{25\pi}$$

$$\text{Πρίσματα : } E_{ολ} = \Pi_{\text{ερ. βάσης}} \cdot \acute{\upsilon}\psi\omicron\varsigma + 2 \cdot E_{\text{βάσης}}, V = E_{\text{βάσης}} \cdot \acute{\upsilon}\psi\omicron\varsigma$$

$$\text{Σφαίρα : } E = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2625. Ένα ορθογώνιο έχει πάντα μήκος τριπλάσιο του πλάτους του. Αν το εμβαδό του αυξάνεται με ρυθμό 4, να βρεις το ρυθμό μεταβολής του πλάτους τη χρονική στιγμή που αυτό ισούται με 8

$$\frac{1}{12}$$

2626. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με ρυθμό $100 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$. Αν η πίεση του αέρα είναι σταθερή, πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα του μπαλονιού τη χρονική στιγμή που έχει μήκος 3 εκ.

$$\frac{50}{18\pi}$$


2627. Ένα σώμα κινείται πάνω στην ευθεία $3x + 2y = 6$. Η τετμημένη του σώματος αυξάνεται με ρυθμό 2εκ/λεπτό. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης.

-3

2628. Δύο πλοία κινούνται με κατεύθυνση προς το λιμάνι Ο. Το P_1 κινείται νότια με σταθερή ταχύτητα, το P_2 δυτικά με ταχύτητα 30. Οι διευθύνσεις των πλοίων είναι κάθετες. Τη χρονική στιγμή που το P_1 βρίσκεται σε απόσταση 4 από το Ο, το P_2 βρίσκεται 3 από το Ο. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των δύο πλοίων είναι -50. Να βρεις ποιο πλοίο θα φτάσει πρώτο στο λιμάνι Ο.

2629. Μία κάμερα βρίσκεται σε απόσταση 50 από την άκρη ενός δρόμου και καταγράφει ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 100. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ της κάμερας που παρακολουθεί το αυτοκίνητο τη χρονική στιγμή που το αυτοκίνητο απέχει 100 από την κάμερα.

2630. Δίνονται τα σημεία $A(x, 0), B(0, \ln x), x > 0$. Αν το x μειώνεται με ρυθμό 0,2 να βρεις το ρυθμό

μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB τη χρονική στιγμή όπου το $x = \frac{1}{2}$

$$0,1(\ln 2 - 1)$$



2631. Η ποσότητα ενός αντιβιοτικού δίνεται από τη σχέση $P(t) = 4 * 2^{-\frac{t}{334}}$. Να βρεις τη χρονική στιγμή όπου ο ρυθμός απορρόφησης 3 του αντιβιοτικού είναι ίσος με το 1/64 του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή 0.
2632. Ένας πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα από τη βάση εκτόξευσης A. Σε απόσταση 4 από τη βάση A βρίσκεται το ραντάρ B. Αν η απόσταση του πυραύλου από το ραντάρ αυξάνεται με ρυθμό 3600χμ/ώρα, ποια η ταχύτητα του πυραύλου όταν αυτός απέχει 5 από το ραντάρ.
2633. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στην παραβολή $y = x^2 + 3x + 5$. Να βρεις ποια από τις συντεταγμένες του x, y μεταβάλλεται πιο γρήγορα συναρτήσει του χρόνου, όταν η τετμημένη είναι 3.
2634. Δίνεται ορθή γωνία xOy και τμήμα $AB = 5$ του οποίου τα άκρα ολισθαίνουν στις πλευρές Ox, Oy . Το σημείο A κινείται με ταχύτητα 1. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB τη χρονική στιγμή που το $OA = 3$.
2635. Ένα σποτάκι φωτός είναι στηριγμένο στο έδαφος σε απόσταση 12 από έναν τοίχο. Ένας άνθρωπος ύψους 2μ βαδίζει με ρυθμό 1,25μ/δεπ προς τον τοίχο. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του ύψους του ίσκιου του όταν ο άνθρωπος βρίσκεται 7μ από τον τοίχο.
2636. Ένας φάρος είναι τοποθετημένος σε ένα ξερονήσι σε απόσταση 3 από το πλησιέστερο σημείο A της ακτής. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας υπό την οποία το φως του φάρου προσπίπτει στην ακτή είναι 8π. Να βρεις πόσο γρήγορα το φως του φάρου απομακρύνεται από το A, τη χρονική στιγμή που το σημείο της ακτής το οποίο φωτίζεται απέχει από το A απόσταση 1.
2637. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου ενός κύβου του οποίου η πλευρά μεγαλώνει με ρυθμό $3/2 \text{ cm/sec}$
2638. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός σφαιρικού μπαλονιού το οποίο χάνει αέρα είναι $100 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του μπαλονιού τη χρονική στιγμή για την οποία αυτή είναι 10 cm
2639. Ένα ορθογώνιο έχει πάντα μήκος πενταπλάσιο του πλάτους του. Αν το εμβαδό του μεγαλώνει με ρυθμό $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$ να βρεις το ρυθμό μεταβολής του μήκους του τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται ίσο με 10 cm .
2640. Μία σφαιρική μπάλα χιονιού λιώνει και η επιφάνειά της μειώνεται με ρυθμό $0,5 \text{ cm}^2/\text{min}$. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της διαμέτρου της μπάλας τη χρονική στιγμή που η διάμετρος είναι 10 cm .

$$-\frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{5}{2}$$



2641. Η ακτίνα r (cm) μίας σφαιρικής μπάλας από χιόνι τη χρονική στιγμή t (sec) δίνεται από τον τύπο :

$$r = 9 - t^2, 0 \leq t \leq 3.$$

- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας ως προς το χρόνο
- Κάθε χρονική στιγμή t .
- Τη χρονική στιγμή $t=2$ sec.
- Τη χρονική στιγμή που η επιφάνεια της μπάλας είναι $100\pi \text{ cm}^2$.

2642. Οι διαστάσεις χ, ψ ορθογωνίου είναι 35 cm & 30cm αντίστοιχα και αρχίζουν να ελαττώνονται με ρυθμό 2cm/sec & 1cm/sec αντίστοιχα. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που οι διαστάσεις του είναι $\chi=15\text{cm}$ & $\psi=20\text{cm}$.

-55

2643. Ο όγκος μίας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ m}^3/\text{sec}$. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι 5 m. Ποια η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η επιφάνεια της αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ m}^2/\text{sec}$

2644. Μία σκάλα AB έχει μήκος 13 m είναι πλάγια στερεωμένη στον τοίχο. Κάποια στιγμή η σκάλα γλιστράει και όταν το άκρο της A βρίσκεται σε απόσταση 5m από τον τοίχο, ο ρυθμός κίνησης του είναι 3m/sec. Να βρεις το ρυθμό πτώσης του άκρου της B εκείνη τη χρονική στιγμή.

$-\frac{5}{4}$

2645. Ένας μετεωρίτης εισέρχεται στην ατμόσφαιρα της Γης με ταχύτητα αντιστρόφως ανάλογη του $\sqrt{S}$, όπου S είναι η απόστασή του από το κέντρο της Γης. Να βρεις την επιτάχυνσή του και ν.δ.ο. είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης.

2646. Δύο ποδήλατα ξεκινούν από το ίδιο σημείο O και έχουν κάθετες διευθύνσεις. Το πρώτο κινείται ανατολικά με ταχύτητα 40km/h, ενώ το δεύτερο κινείται βόρεια με ταχύτητα 30km/h. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της απόστασής τους ύστερα από 2 ώρες.

50

2647. Ένα έμβολο κινείται πάνω κάτω στον κύλινδρο μίας μηχανής και η απομάκρυνσή του S από την κορυφή του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $S(t) = 5 - 4\sigma v^2 \left(t + \frac{\pi}{3} \right)$. Να βρεις τη χρονική στιγμή κατά την οποία το έμβολο αλλάζει κατεύθυνση.

2648. Ένα σημείο A κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$. Τη χρονική στιγμή t_0 βρίσκεται στη θέση $(2, 0)$ και το χ αυξάνει με ρυθμό 3cm/sec. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου τη χρονική στιγμή t_0 .

6



2649. Σημείο κινείται στην καμπύλη $3x^2 - y^2 = 12$, έτσι ώστε η τεταγμένη y να αυξάνεται με ρυθμό 6m/sec. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x όταν $x = 4m$.

+3

2650. Ένα σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x\sqrt{x}$ με τέτοιο τρόπο, ώστε η απόσταση του από την αρχή $(0,0)$ να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2 μονάδες ανά sec. Να βρεις το $x'(t)$ όταν το $x = 2$.

2651. Ένα αεροπλάνο πετά κατά μήκος και πάνω από μία εθνική οδό σε ύψος 2 km με ταχύτητα 200 km/h. Ο πιλότος βλέπει ένα αυτοκίνητο να πλησιάζει και προσδιορίζει ότι η απόστασή του είναι 3 km και μειώνεται με ρυθμό 250km/h. Να βρείτε την ταχύτητα του αυτοκινήτου εκείνη τη χρονική στιγμή.

2652. Ένα ποδήλατο βρίσκεται 4 km δυτικά από ένα σταυροδρόμι και κινείται προς αυτό με ταχύτητα 9km/h. Την ίδια ώρα ένα άλλο ποδήλατο βρίσκεται 3km βόρεια από το σταυροδρόμι και απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα 10km/h. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των ποδηλάτων εκείνη τη χρονική στιγμή.

$$\frac{6}{5}$$

2653. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του τη στιγμή που αυτό είναι ίσο με 36 m^2 .

2654. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου μιας σφαίρας ως προς την ακτίνα της τη χρονική στιγμή που αυτή είναι $\rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

2655. Δίνεται ένα τετράγωνο πλευράς α .

- Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου ως προς την πλευρά τη στιγμή που το εμβαδόν του είναι ίσο με 25 cm^2 .
- Η πλευρά του τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό $\alpha'(t) = 2 \text{ cm/s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $\alpha(t_0) = 3 \text{ cm}$.
- Έστω x η διαγώνιος του τετραγώνου. Η πλευρά α αυξάνεται με ρυθμό $\alpha'(t) = \sqrt{2} \text{ cm/s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου x .

2656. Το ύψος x της στάθμης του νερού σ' ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 2 cm ανεβαίνει με ρυθμό $\frac{2}{\pi} \text{ cm/s}$.

- Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο V του νερού με το ύψος της στάθμης του x .
- Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού.

2657. Σ' ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s , ενώ η πλευρά $B\Gamma$ ελαττώνεται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε:

- τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου,



- τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν $AB = 10 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 6 \text{ cm}$.

2658. Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με σταθερή βάση $B\Gamma = 16 \text{ cm}$ μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/s . Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο A απέχει από την πλευρά $B\Gamma$ 6 cm , να βρείτε:

- τον ρυθμό μεταβολής των ίσων πλευρών,
- τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

2659. Αν σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s , να βρείτε:

- με τι ρυθμό μεταβάλλεται η πλευρά του τριγώνου,
- με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου όταν αυτό είναι ίσο με $\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2660. Το μήκος ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το εμβαδόν του κύκλου είναι $100\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε:

- την ακτίνα του κύκλου,
- τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κύκλου,
- τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου.

2661. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $16 \text{ cm}^2/\text{s}$. Να βρείτε:

- τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου τη χρονική στιγμή που αυτή είναι 5 cm ,
- τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 5 cm .

2662. Δίνεται ένας κύβος πλευράς α , επιφάνειας E και όγκου V . Η πλευρά α αυξάνεται με ρυθμό $\alpha'(t) = 3 \text{ cm/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $\alpha(t_0) = 2 \text{ cm}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της επιφάνειας E ,
- του όγκου V .

Η επιφάνεια του κύβου αυξάνεται με ρυθμό: $E'(t) = 6 \text{ cm}^2/\text{s}$ Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $E(t_0) = 24 \text{ cm}^2$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της πλευράς α ,
- του όγκου V .

Ο όγκος του κύβου αυξάνεται με ρυθμό $54 \text{ cm}^3/\text{s}$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $V(t_0) = 27 \text{ cm}^3$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της πλευράς α ,
- της επιφάνειας E .

2663. Δίνεται ένα σφαιρικό μπαλόνι με ακτίνα R , επιφάνεια E και όγκο V . Η ακτίνα του μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/s και τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι ίση με 3 cm . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της επιφάνειας E ,
- του όγκου V .



Η επιφάνεια του μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό $16\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ η επιφάνεια είναι ίση με $64\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της ακτίνας R ,
- του όγκου V .

Ο όγκος του μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό $48\pi \text{ cm}^3/\text{s}$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι ίσος με $36\pi \text{ cm}^3$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

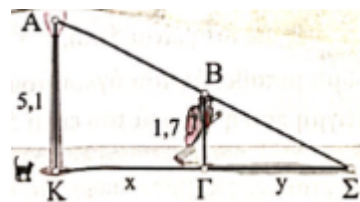
- της ακτίνας R ,
- της επιφάνειας E .

2664. Ο όγκος ενός σφαιρικού μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό $32\pi \text{ cm}^3/\text{s}$. Να βρείτε:

- την ακτίνα του μπαλονιού τη χρονική στιγμή t_0 που η επιφάνειά του είναι $16\pi \text{ cm}^2$,
- τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η ακτίνα του τη χρονική στιγμή t_0 που η επιφάνεια της σφαίρας είναι $16\pi \text{ cm}^2$.

2665. Η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $8 \text{ cm}^2/\text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι 5 cm .

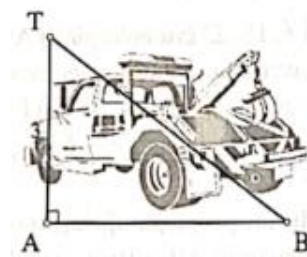
2666. Μια λάμπα είναι τοποθετημένη σε μια κολόνα και φωτίζει από ύψος $5,1 \text{ m}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της σκιάς ενός ανθρώπου, ύψους $1,70 \text{ m}$, ο οποίος απομακρύνεται με ταχύτητα 2 m/s από την κολόνα.



2667. Σ' έναν κατακόρυφο τοίχο βρίσκεται στερεωμένη πλάγια μια σκάλα μήκους 5 m . Το κάτω μέρος της σκάλας αρχίζει να γλιστρά με ρυθμό 1 m/s . Τη χρονική στιγμή t_0 που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3 m , να βρείτε:

- σε τι ύψος είναι στερεωμένη η σκάλα,
- με τι ρυθμό πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας,
- με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο και το έδαφος,
- με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο.

2668. Ένας γερανός (A) έλκει οριζόντια ένα βαρύ αντικείμενο (B) που βρίσκεται στο έδαφος μ' ένα συρματόσχοινο. Η τροχαλία (T) βρίσκεται σε ύψος 3 m από το έδαφος πάνω από τον γερανό. Αν το συρματόσχοινο διέρχεται από την τροχαλία με ρυθμό 20 m/min , να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο το σώμα πλησιάζει τον γερανό όταν αυτό απέχει 4 m .



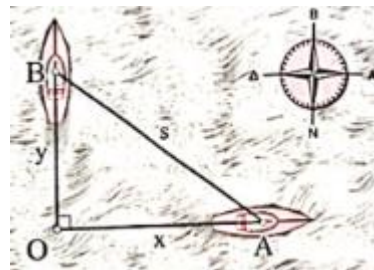
2669. Από ένα διαστημικό κέντρο K παρακολουθείται η κατακόρυφη εκτόξευση ενός πυραύλου. Η βάση εκτόξευσης βρίσκεται 3 km από το κέντρο παρακολούθησης. Να βρείτε



τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζουν ο πύραυλος, το κέντρο και η βάση εκτόξευσης τη στιγμή που ο πύραυλος έχει διανύσει 6 km και η ταχύτητά του είναι 45 km/s.

2670. Δύο πλοία A και B , που κινούνται το ένα ανατολικά και το άλλο βόρεια με ταχύτητες: $v_A = 12$ km/h και $v_B = 18$ km/h αντίστοιχα, διήλθαν από έναν φάρο στη 1 μ.μ. και στις 2 μ.μ. αντίστοιχα. Να βρείτε:

- την απόσταση των δύο πλοίων στις 3 μ.μ.,
- τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης των δύο πλοίων στις 3 μ.μ.



2671. Μια κάμερα είναι τοποθετημένη στην κορυφή ενός στύλου ύψους 3 m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ υπό την οποία η κάμερα παρακολουθεί ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα 40 km/h όταν αυτό:

- έχει απομακρυνθεί από τον στύλο κατά 4 m,
- χρειάζεται να διανύσει 4 m, για να διέλθει από τον στύλο.



2672. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση πάνω σ' έναν άξονα $x'x$. Η θέση $x(t)$ του κινητού δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^2 - 6t + 5$, όπου t είναι ο χρόνος σε s με $t \in [0, 10]$.

- Σε ποια θέση του άξονα βρίσκεται το κινητό στην αρχή της κίνησής του;
- Πόση είναι η ταχύτητα του κινητού μετά από 4 s;
- Ποια είναι η επιτάχυνση του κινητού κάθε χρονική στιγμή t ;
- Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά;
- Πόσο είναι το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα;

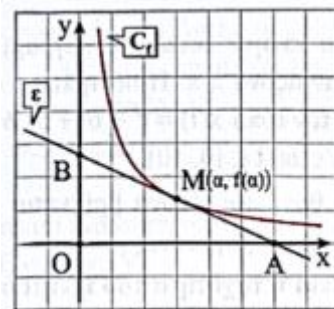
2673. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Η θέση του κινητού δίνεται από τη συνάρτηση: $x(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$ όπου $t \geq 0$ ο χρόνος σε s.

- Σε ποια θέση βρίσκεται το κινητό πριν αρχίσει να κινείται;
- Να βρείτε τη (στιγμιαία) ταχύτητα την κάθε χρονική στιγμή t .
- Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 1$ s;
- Ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα είναι ίση με μηδέν;
- Να βρείτε ποιο χρονικό διάστημα το σώμα κινείται προς τα αριστερά.
- Ποια είναι η μεγαλύτερη απομάκρυνση του κινητού προς τα αριστερά;
- Ποια είναι η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 1$ s;



2674. Η εφαπτομένη AB της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο μεταβλητό σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$, τέμνει τους άξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M .
- Να αποδείξετε ότι $AM = MB$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του α και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ως προς α .



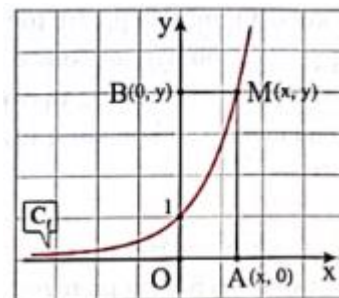
2675. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = (x - 1)^2$. Η τετμημένη του M είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή O των αξόνων με ρυθμό 2. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ) , με εξίσωση $x - y + 1 = 0$, καθώς και την τετμημένη x του M τη στιγμή εκείνη.

2676. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^3 - 2x + 3$. Αν τη χρονική στιγμή t_0 η κλίση της f στο σημείο M είναι 25 και η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s, να βρείτε:

- την τετμημένη του σημείου M ,
- τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του σημείου M .

2677. Το σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ με τέτοιον τρόπο ώστε το x να απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό 1 cm/s. Έστω A, B οι προβολές του M στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της τεταγμένης y τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 1$,
- του εμβαδού του ορθογωνίου $MAOB$ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $(2, e^2)$,
- της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M τη στιγμή που $x(t_0) = 1$.



2678. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της C_f ξεκινώντας από το σημείο O και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s.

- Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου κάθε χρονική στιγμή t , με $t \geq 0$, δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 4t$
- Να βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται το σημείο για να φτάσει στο $A(36, 6)$.



- Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M όταν αυτό περνάει από το σημείο $B(16,4)$.
- Έστω $\varphi = M\hat{O}x$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ κατά τη χρονική στιγμή που το σημείο περνάει από το $\Gamma(4,2)$.

2679. Μια ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης στρέφεται γύρω από το σημείο $\Sigma(1,1)$. Αν ο συντελεστής διεύθυνσής της μεταβάλλεται με ρυθμό -4 και η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B , τότε:

- να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του συντελεστή διεύθυνσης,
- να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,0)$.

2680. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x)}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)+2^x-2}{f(x)+2^{x+1}+1}$

Έστω $M(\alpha, f(\alpha))$ ένα σημείο της C_f . Το α κινείται στον άξονα $x'x$ με ρυθμό: $\alpha'(t) = 2$ cm/s. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το α διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η εφαπτομένη της C_f στο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία φ και τον τέμνει στο σημείο $N(x, 0)$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της γωνίας φ ,
- της τετμημένης x .

2681. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω το σημείο $A(1,1)$. Να βρείτε:

- την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$,
- ότι η παραπάνω εφαπτομένη επανατέμνει τη C_f σ' ένα σημείο B , στο οποίο η κλίση της f είναι τετραπλάσια από την κλίση της f στο σημείο A .

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην $y = x^3$ με τέτοιον τρόπο, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το κινητό διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της τεταγμένης y ,
- της γωνίας $\varphi = M\hat{O}x$,
- του εμβαδού του τριγώνου MOB , όπου B η προβολή του M στον άξονα $x'x$.



Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης x , αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$. δ) Έστω $M(\alpha, f(\alpha)), \alpha \neq 0$, ένα σημείο της C_f .

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο M καθώς και το σημείο A που η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$.

Έστω ότι το M κινείται κατά μήκος της καμπύλης της C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ είναι ίσος με $2\alpha(t)$.

- Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A τη χρονική στιγμή $t = t_0$ που το M έχει τετμημένη 6.

Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο της C_f και A, B οι προβολές του M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, με $x > 0$.

- Να βρείτε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του ορθογωνίου $BMAO$ ως συνάρτηση της τετμημένης x του M .
- Αν το x απομακρύνεται από την αρχή O με ρυθμό 1 cm/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου Π και του εμβαδού E τη χρονική στιγμή $t = t_0$ κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $N(2, 8)$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3, x \geq 0$, ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι 2 cm/s . Να βρείτε:

- τη συνάρτηση θέσης $x(t)$ της τετμημένης του κινητού,
- τον χρόνο που χρειάζεται το κινητό για να φτάσει στο σημείο $A(4, 64)$,
- τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y καθώς το κινητό περνάει από το σημείο $B(2, 8)$.

2682. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$,

$$e^{2f(x)} = 1 + 2xe^{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , την $f'(x)$ και την $f''(x)$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f :

- στο σημείο $A(0, f(0))$,
- που είναι παράλληλες στην ευθεία: $(\epsilon): x - \sqrt{2} \cdot y + 3 = 0$
- που είναι κάθετες στην ευθεία: $(\eta): x + y + 5 = 0$ στ) Ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο: $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1, 0)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης: $y = f(x)$, $x \geq x_0$ $x = x(t)$, $y = y(t)$ με $t \geq 0$ Να βρείτε το σημείο της καμπύλης στο



οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y , αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$ με $t \geq 0$.

- Με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και τον τύπο της f^{-1} .

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη: $y = f(x)$ Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x είναι ίσος με 2 cm/s. Τη χρονική στιγμή που το σημείο M βρίσκεται επάνω στον άξονα $y'y$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της τεταγμένης y ,
- της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$.



34. Να διατυπώσετε τι θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής:

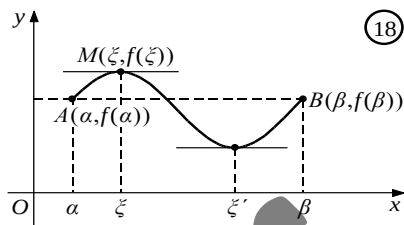
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η C_f είναι μία συνεχής γραμμή από το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ στο $B(\beta, f(\beta))$, η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$.



(18)

35. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής:

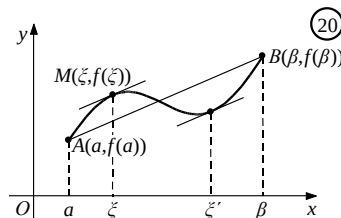
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η C_f είναι μία συνεχής γραμμή από το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ στο $B(\beta, f(\beta))$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, που είναι παράλληλη στην ευθεία AB , με $\xi \in (\alpha, \beta)$.



(20)



Rolle και εφαρμογές του

Θεώρημα ROLLE

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f(a) = f(\beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική ερμηνεία : υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο ξ να είναι παράλληλη στον $\chi\chi'$

Να εξετάσεις αν ισχύει το θεώρημα Rolle στις συναρτήσεις (αν ναι, να βρεις το ξ και να δώσεις τη γεωμετρική ερμηνεία) :

2683. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}, x \in [0, 3]$

$\frac{3}{2}$

2684. $g(x) = x^2 - 6x - 8, x \in [2, 4]$

3

2685. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 0 \\ x^3 - 4, & x > 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

0

2686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x + b, & x \in [-1, 0] \\ x^2 + cx + 1, & x \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow a, b, c = ?$ για να εφαρμόζεται το Rolle στο $[-1, 1]$

$a = 9, b = 1, c = 4$

2687. Δίνονται συναρτήσεις παραγωγίσιμες $f, g : \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}, g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$, ν.δ.ο. υπάρχει

$\xi \in (a, b)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

2688. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη ώστε $f(2) = f(1) + 3$, ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ ώστε

$f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi + 2$

2689. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη ώστε $f(0) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$. Ν.δ.ο. η εξίσωση $f'(x) = \eta\mu x - 2$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



2690. Δίνεται συνάρτηση άρτια και παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$. Ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ ώστε $f'(\xi) + \eta \mu \xi = 8\xi$
2691. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f , να δείξεις ότι η εξίσωση $(2x-3)f(x) + (x^2-3x)f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 3)$
2692. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) όπου $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. Ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)f(\xi) = \xi$
2693. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : f(2) = 2f(1)$, ν.δ.ο. υπάρχει $c \in (1, 2) : f'(c) = \frac{f(c)}{c}$
2694. Δίνεται παραγωγίσιμη $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$, ν.δ.ο. υπάρχει $c \in (0, 1) : \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{e^c - 2ce^{c^2}}{e^{c^2} - e^c}$
2695. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, g' συνεχής στο $[0, 1]$ και $g(1) = g(0) + \frac{1}{2}, g'(0) > 0$
- ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (0, 1) : g'(\xi) = \xi$.
 - Ν.δ.ο. υπάρχει $\rho \in (0, 1) : g'(\rho) = 2\rho$
2696. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ με $3f(1) = f(3)$. Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων
2697. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[-a, a], a > 0$, παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ και $f(-a) = f(a) = 0$. Ν.δ.ο. υπάρχει $c \in (-a, a) : f'(c) + f(c) = 0$
2698. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = f(1) = 0$. Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1) : f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$
2699. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, a > 0, f(-a) = f(a)$, ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (-a, a) : f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$
2700. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b], ab < 0, f(a) = f(b) = f(0)$, ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (a, b) : f''(\xi) = 0$
2701. Ν.δ.ο. έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$ η εξίσωση : $5x^4 - 4x^3 - 2x + 1 = 0$



2702. Αν για τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει: $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$, ν.δ.ο. έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ η

$$\text{εξίσωση } \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Θ.Μ.Τ. και εφαρμογές του

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γεωμετρική ερμηνεία: υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο ξ να είναι παράλληλη στην AB

Να εξετάσεις αν εφαρμόζεται ΘΜΤ (αν ναι, να βρεις το ξ και να δώσεις γεωμετρική ερμηνεία) στις συναρτήσεις:

2703. $f(x) = x - x^2, x \in [1, 2]$

$$\frac{3}{2}$$

2704. $f(x) = e^x, x \in [0, 1]$

$$\ln(e-1)$$

2705. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2, & x > 1 \end{cases}, x \in [0, 2]$

$$\emptyset$$

2706. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$, $f(3) = 12$, $f(1) = 4$, ν.δ.ο. υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x - 2017$

2707. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(a) = -2b$, $f(b) = -2a$, ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b): f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$

2708. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = f(9)$. Ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 9): f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

2709. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[1, 10]$ με $f(1) = 4$, $f(10) = 9$, ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 10): 2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 5$



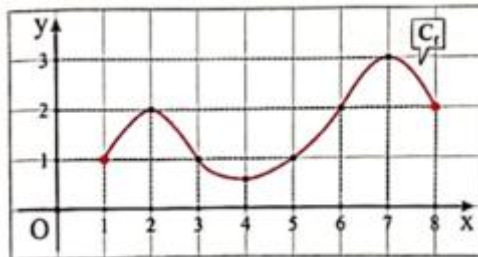
2710. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) , $f(a) = \frac{a}{5}$, $f(b) = \frac{b}{5}$, ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b) : 3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 1$
2711. Δίνεται συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f(1) + f(2) = f(0) + f(3)$, ν.δ.ο. έχει τουλάχιστον μία ρίζα η εξίσωση $f''(x) = 0$
2712. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1, 3]$ όπου $2f(1) = f(-1) + f(3)$, ν.δ.ο. έχει τουλάχιστον μία ρίζα η εξίσωση $f''(x) = 0$
2713. Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[0, 2]$ και $f(2) = f(0) + 2$,
- ν.δ.ο. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$
 - ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (0, 2) : 2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$
2714. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη όπου $f''(x) \neq 0$, ν.δ.ο. τρία οποιαδήποτε σημεία της γραφικής παράστασης δε μπορεί να είναι συνευθειακά
2715. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη όπου $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^4 - x^2$, να βρεις :
- $f'(-1)$
 - $f'(1)$
 - Ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f''(\xi) = 2$
2716. Ν.δ.ο. $\forall \alpha, \beta > 0, \alpha < \beta \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$
2717. Ν.δ.ο. $\forall \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha < \beta \Rightarrow \frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \alpha} < \varepsilon \varphi \beta - \varepsilon \varphi \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \beta}$
2718. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 5]$.
-
- Να δικαιολογήσετε γιατί δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[-1, 1]$, $[-1, 2]$ και $[4, 5]$.
 - Να βρείτε ένα διάστημα Δ στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle, καθώς και το x_0 που ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος Δ που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος.
 - Να βρείτε ένα διάστημα στο οποίο ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν οι προϋποθέσεις του.



2719. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[1,8]$.

Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα:

- $[1,3]$
- $[3,5]$
- $[1,6]$
- $[2,8]$
- Να βρείτε ένα διάστημα στο οποίο ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, αλλά δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις του.



2720. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $\Delta = [0,4]$.
- Να βρείτε το $x_0 \in (0,4)$ που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος Rolle.
- Να επιβεβαιώσετε το παραπάνω συμπέρασμα με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος.

2721. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2|x - 1| + 1$ Να εξετάσετε:

- αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,
- αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

2722. Να εξετάσετε για ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο αντίστοιχο διάστημα.

- $f(x) = x^4 - x^2 + 2$, $x \in [-2,2]$
- $g(x) = x^2 + \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$
- $h(x) = x^2 + |x| + 3$, $x \in [-3,3]$
- $\varphi(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{x+1}$, $x \in [1,2]$

2723. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 9, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 8, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και να βρείτε την παράγωγό της.
- Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-3,5]$.
- Να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,5]$.

2724. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα Δ , όπου:

- $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 + 2x, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$, $\Delta = [-5,4]$



- $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 0 \\ x^3, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}, \quad \Delta = [-1, 1]$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ \eta\mu^2 x + 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}, \quad \Delta = \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ x^3 - x^2 - 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}, \quad \Delta = [-4, 3]$

2725. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-\pi, \pi]$,
- υπάρχει $x_0 \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο, ώστε: $\eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0$

2726. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln x$.

- Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[1, \pi]$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \eta\mu x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, \pi)$.

2727. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = e^x f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και: $f(0) = f(2) = 0$

- Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την g στο διάστημα $[0, 2]$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

2728. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$

με $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2729. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- για τη συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, $c \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = 0$,
- υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(c, 0)$.

2730. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) + (x - 1)(x - 3)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την πρώτη παράγωγο της f .



- Να εξετάσετε αν για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[1,3]$.
- Αν ναι, να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[1,3]$.

2731. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x - 2)\ln(x + 1)$. Να αποδείξετε ότι:

- ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[0,2]$,
- η εξίσωση $e^x(x + 1)^{x+1} = e^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

2732. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να αποδείξετε ότι:

- για τη συνάρτηση: $g(x) = e^{f(x)}(x - \alpha)(x - \beta)$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$,
- υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$

2733. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3 + (\beta - 1)x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να βρείτε τις τιμές των α και $\beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.
- Να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο $[-1,1]$.

2734. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ \gamma x^2 + 2(\alpha + 1)x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Αν για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $\Delta = [-1,3]$:

- να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ,
- να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα Δ .

2735. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{2}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να βρείτε το α ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \frac{2}{\pi}]$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 στο διάστημα $(0, \frac{2}{\pi})$ τέτοιο, ώστε $\epsilon f \frac{2}{x_0} = \frac{1}{x_0}$.

2736. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \text{αν } x < 1 \\ (\alpha + \gamma)x^2 + \beta x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x^2 + (1 - \gamma)x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$



- Να βρείτε την τιμή του γ , ώστε για την f να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$ και στη συνέχεια να το εφαρμόσετε.

2737. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με:

$$f(0) = f(1) = 2 \quad \text{και} \quad f'(0) = f'(1) = 0. \quad \text{Να αποδείξετε ότι:}$$

- υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$,
- υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$.

2738. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με:

$$f(\alpha) = f(\beta) \quad \text{και} \quad f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \quad \text{να αποδείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε: } f^{(3)}(\xi) = 0.$$

2739. Δίνεται συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) = f'(\beta) = 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη της C_f .

2740. Δίνεται το πολυώνυμο: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$

- Να βρείτε: α) την f' ,
- το πλήθος των πραγματικών ριζών του πολυωνύμου:

$$g(x) = (x-2)(x-3)^2 + (x-1)(x-3)^2 + 2(x-1)(x-2)(x-3)$$

2741. Αν η εξίσωση: $x^4 + \alpha x^3 + 3\beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$

έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες μεταξύ τους και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > 8\beta$.

2742. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2743. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $3\lambda x^2 + 2\mu x = \lambda + \mu$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2744. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4x^3 + 3(\alpha - 1)x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2745. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $3\lambda x^2 + 2x = \lambda + 1$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.



2746. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και: $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

2747. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - x + 5, \quad g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 4$$

έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα $(1,2)$.

2748. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

- $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$,
- $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

2749. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

- $4x^3 - 3(\alpha + \beta)x^2 + 2(2\alpha - \beta)x + 2\beta = \alpha + 1$
- $(x + 1)e^{x-1} + 2(\alpha + \beta)x = \alpha + \beta + 1$ έχουν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

2750. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $4\alpha = 3(\beta + \gamma)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \ln^2 x = \beta \ln x + \gamma$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e^2)$.

2751. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(x^2 - 4)\sin x + 2x\cos x = 0$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-2,2)$.

2752. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(x^2 - 1)\sin x + 2x\cos x = 0$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

2753. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = 2x_0$

2754. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f(2) - f(1) = 3$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

2755. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Οι f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) .

- Αν $g(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και:

$$f(\alpha)g(\beta) = f(\beta)g(\alpha) \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε: } \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$



- Αν $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και: $f(\alpha) = g(\beta)$, $f(\beta) = g(\alpha)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = 0$

2756. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = 2 - \frac{f(x_0)}{x_0}$

2757. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\gamma) = \frac{2\gamma f(\gamma)}{1 - \gamma^2}$$

2758. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{\alpha - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}$

2759. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$, με $f(0) = f(\pi) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = -f(x_0) \sin x_0$

2760. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \left(\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1+\xi} \right) f(\xi)$

2761. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$ και επιπλέον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\gamma) = \frac{f(\gamma)}{\alpha + \beta - \gamma - 2f(\gamma)}$

2762. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{2f'(\gamma)}{f(\gamma)} = \frac{f'(1-\gamma)}{f(1-\gamma)}$

2763. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει:

$$2(x-1)f(x) \neq (x^2 - 2x)f'(x) \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2] \quad \text{Να αποδείξετε ότι:}$$

- $f(0)f(2) \neq 0$,
- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

2764. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) , με: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ $[\alpha, \beta]$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα στο (α, β) .



2765. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$ για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

2766. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^5 - 5x + \lambda = 0$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

2767. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4x^3 - 21x^2 + 18x + 6\mu = 0$

έχει για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

2768. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 4f(x) + 3 = e^x + x^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

2769. Αν $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^4 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

2770. Αν α, β και $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^4 + 2\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.}$$

2771. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^5 + x^3 + 2\eta\mu x - 1 = 0$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

2772. Να αποδείξετε ότι:

- η εξίσωση $x^5 - 3x^3 + 5x - 2 = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$,
- η εξίσωση $2 - \ln x = x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

2773. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{Να αποδείξετε ότι η εξίσωση } f(x) = 0 \text{ έχει το πολύ δύο ρίζες.}$$

2774. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ τρεις ρίζες.

2775. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$,
- μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης: $f''(x) = 0$
- μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης: $f'(x) = 0$



- υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$,
- αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες.

2776. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = x \ln x + \sin x$

Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία που έχουν τετμημένες $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.

2777. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα Δ .

- $x^4 + 2x = 5$, $x \in \Delta = (-2, 2)$
- $x^2 = \sin x$, $x \in \Delta = (-\pi, \pi)$

2778. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 3^x$ και $g(x) = -x^2 + 3x + 1$

Να αποδείξετε ότι:

- η εξίσωση $f'(x) = g'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$,
- οι C_f, C_g έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία.

2779. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με:

$$f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ και } f(\alpha)f'(\beta) = f(\beta)f'(\alpha)$$

Να αποδείξετε ότι:

- η f είναι αντιστρέψιμη,
- υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)f''(x_0) = (f'(x_0))^2$

2780. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, η παράγωγός της είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύουν οι σχέσεις: $f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$ και $f'(0) > 0$ Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\alpha) = \alpha$,
- υπάρχει $\beta \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\beta) = 2\beta$.

2781. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$ και:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \text{ και } f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.



- Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2782. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με: $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες,
- η συνάρτηση f' είναι "1 - 1",
- η εξίσωση $f(x) = xf'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$, δεδομένου ότι: $2f(1) = f(2)$

2783. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2,3)$. Αν η ευθεία AB με $A(2, f(2))$ και $B(3, f(3))$ διέρχεται από το σημείο $\Sigma(-1, \alpha)$, να αποδείξετε ότι:

- $4f(2) - 3f(3) = \alpha$,
- από το σημείο Σ μπορούμε να φέρουμε μία τουλάχιστον εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

2784. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f(\alpha) = \alpha, \quad f(\beta) = \beta, \quad f(\gamma) = \gamma, \quad 0 < \alpha < \beta < \gamma$$

Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \gamma)$, με $\kappa \neq \lambda$, τέτοια, ώστε: $f'(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{\kappa}, \quad f'(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$
- αν η ευθεία AB , όπου $A(\kappa, f(\kappa))$ και $B(\lambda, f(\lambda))$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε: $f''(x_0) = 0$
- υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $2f(x_0) = \alpha + \beta$

2785. Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) με:

$$f'(x)g'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι "1 - 1".
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\gamma \in (\alpha, \beta)$ είναι: $f(\gamma) \neq f(\alpha)$ και $g(\gamma) \neq g(\beta)$
- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης: $h(x) = (f(x) - f(\alpha))(g(x) - g(\beta))e^x$



- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(\gamma)}{f(\alpha)-f(\gamma)} + \frac{g'(\gamma)}{g(\beta)-g(\gamma)} = 1$

2786. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με: $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι άρτια συνάρτηση.
- Αν $f(x) + f(4-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

2787. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και:

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

- Να αποδείξετε ότι: i) $g(\alpha) \neq g(\beta)$,
- υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με: $g(x) = f(\beta) - f(x) - (\beta - x)f'(x)$ και $h(x) = (\beta - x)^2$

Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη:

- να βρείτε τις παραγώγους των g και h ,
- να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 f''(x_0)$$



Θ.Μ.Τ. και Rolle

Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ. .Για εκείνες που ισχύει να βρεις το αντίστοιχο ξ , με αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία

2788. $f(x) = 4 - x^2, x \in [0, 2]$

1

2789. $f(x) = -\frac{1}{x}, x \in [1, 2]$

 $\sqrt{2}$

2790. $f(x) = \sin^2 x, x \in [0, \pi]$

 $\emptyset$

2791. $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in [1, 8]$

 $\sqrt{\frac{343}{27}}$

2792. $f(x) = x^2 - 3x + 2, x \in [0, 3]$

 $\frac{3}{2}$

2793. $f(x) = \eta\mu 4x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

 $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

2794. $f(x) = 3 + \sin 2x, x \in [0, \pi]$

 $k\pi + \frac{\pi}{2}$

2795. $f(x) = |x|, x \in [-2, 2]$

 $\emptyset$

2796. Να εφαρμόσεις το Θ.Μ.Τ. (να βρεις το ξ) στην $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \leq -1 \\ x^3 - x - 2, & x > -1 \end{cases}, x \in [-4, 3]$

 $\emptyset$

Πότε εφαρμόζω Θ. Μ.Τ. ;

- Αν υπάρχει διπλή ανίσωση με α, β
- Αν δίνεται ή ζητείται ν.δ.ο. ισχύει σχέση με πολλά (έστω κ) f: Θα κάνεις $\kappa-1$ ΘΜΤ βάζοντας τα ορίσματα των f στη σειρά για να βρεις τα διαστήματα .
- Αν ζητείται σχέση με πολλά f' (έστω κ) θα κάνεις τόσα κ ΘΜΤ .Το δύσκολο εδώ είναι να κόψεις το πεδίο ορισμού σε κ διαστήματα .



2797. Να εφαρμόσεις Rolle (να βρεις το ξ) στην $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x^3 + 1, & x > 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

0

2798. Αν $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [0, 2]$, να βρεις το ξ του αντίστοιχου ΘΜΤ ή ROLLE

2799. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 5]$,

$$f(1) = -2, |f'(x)| < 3, \forall x \in (1, 5) \Rightarrow -14 < f(5) < 10$$

2800. Ν.δ.ο. $e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b, a < b$

2801. Ν.δ.ο. $1 - \frac{a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$

2802. Να δείξεις ότι $\left| \frac{x}{x^2 + 4} \right| \leq \frac{1}{4}$ Αν $f : f'(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4} |b - a|$

2803. Να βρεις τα a, b, g ώστε στη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x^3 + bx^2 + 3x + g, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, x \in [-1, 1]$ να ισχύει

το Rolle

2804. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & -1 \leq x < 0 \\ cx^2 + 4x + 4, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, να βρεις τα a, b, g ώστε να

ικανοποιείται το Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$

2805. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $10 - 5x - x^2 = 0$ έχει μοναδική λύση στο $[-1, 2]$, χωρίς να λυθεί.

2806. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-2)(x-3)(x-4)$. Ν.δ.ο. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς 3

ρίζες.

Ν.δ.ο έχει μία τουλάχιστο ρίζα :

- Bolzano στη συνάρτηση που 'βλέπεις'
- Rolle στη συνάρτηση που θα 'φανταστείς' ότι αν την παραγωγίσεις θα βγει η συνάρτηση που 'βλέπεις' (δηλ. το ολοκλήρωμά της). Συνήθως αυτό που βλέπεις είναι κρυμμένο $f \bullet g$ ή $\frac{f}{g}$.

νου σου μπορεί να υπάρξει η e^x

2807. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \text{συνεχείς, παραγωγίσιμες}, \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$, να δείξεις ότι υπάρχει

ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ ώστε $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.



2808. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4ax^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, Ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

2809. Δίνεται η συνάρτηση $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) \sin x + g'(x) \eta \mu x = 0$. Ν.δ.ο. η παραπάνω εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$ και τουλάχιστον άλλη μία στο $(\pi, 2\pi)$

2810. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = f(1) = 0$. Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$

2811. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}(x^2+12), & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$, να βρεις το $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε η

εφαπτομένη στο ξ να είναι παράλληλη προς τη χορδή $AB: A(0, f(0)), B(4, f(4))$

2812. Δίνεται η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = f(b)$, συνεχής και παραγωγίσιμη. Ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{\beta f(\beta) - \alpha f(a)}{\beta - a} = \xi f'(\xi) + f(\xi)$.

Ν.δ.ο. υπάρχουν ακριβώς κ ρίζες : Προτίμησε πλήθος ριζών αλλιώς συνδυασμό Bolzano – Rolle

Ν.δ.ο. η εξίσωση δεν μπορεί να έχει περισσότερες από κ ρίζες : Δημιουργούμε συνάρτηση αφού μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Υποθέτεις ότι έχεις κ+1 ρίζες οπότε θα ισχύει κ φορές το Rolle, δηλαδή η $f'(x)=0$ θα έχει κ ρίζες, οπότε θα οδηγήσει σε άτοπο.

2813. Έστω συναρτήσεις $f, g: f(a) = g(\beta), f(\beta) = g(a)$, όπου οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων είναι πάντοτε ευθείες τεμνόμενες. Ν.δ.ο. υπάρχει μοναδικό σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

2814. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a, b]: f(a) = f(b)$. Αν η συνάρτηση δε διατηρεί ίδιο πρόσημο στο πεδίο ορισμού ν.δ.ο. η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f'(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, b) .

2815. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού όπου $f(2) = f(1) + \frac{31}{5}$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f'(\xi) = \xi^4$

2816. Να βρεις το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 + 6x^2 + 9x + k = 0$, για τις διάφορες τιμές του κ



2817. Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 2f(1)$, παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού .Ν.δ.ο.

υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$

2818. Δίνεται η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$, παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού και

$f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$, ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x)f'(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα .

2819. Δίνεται η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = f(b) = 0$, παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού ν.δ.ο. η

εξίσωση $f'(x)(x^2 + 1) = -2xf(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b)

2820. Αν $f(x) = (x-a)^3(x-b)^4$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b) : \frac{\xi - a}{\beta - \xi} = \frac{3}{4}$

2821. Έστω $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 20x + 1$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 4) : f''(\xi) = 0$

2822. Αν f συνεχής στο $[1, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$, $f(1) = 2$, $3 \leq f'(x) \leq 5 \Rightarrow 14 \leq f(5) \leq 22$

2823. Αν $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 0$, $0 < f'(x) < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq x - 2$

2824. Δίνεται συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) ,

$f(a) = f(b)$, $f(x) \neq 0$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$

2825. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, $f(2) = 2f(1)$, ν.δ.ο. υπάρχει

τουλάχιστον ένα $p \in (1, 2) : f'(p) = \frac{f(p)}{p}$

2826. Ν.δ.ο. $|\sin^2 a - \sin^2 b| \leq |a - b|$

2827. Δίνεται συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) , $f(a) \neq f(b)$,

• ν.δ.ο. η εξίσωση $2f(x) = f(a) + f(b)$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b) .

• Επιπλέον ν.δ.ο υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b) : \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2b - 2a}{f(b) - f(a)}$.

2828. Δίνεται συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[1, 4]$, παραγωγίσιμη στο

$(1, 4)$, $f(1) = 5$, $f(4) = 11$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη της ευθείας $y = 2x + 3$.



2829. Δίνεται συνάρτηση $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) ,
 $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b): f''(\xi) = 0$
2830. Έστω συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(1) = p+k$, $f(2) = 2p+k$, $f(3) = 3p+k$,
 ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,3): f''(\xi) = 0$
2831. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη, $f(-5) = -5$, $f(5) = 5$,
 • ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-5,5): f'(x_0) = 0$
 • ν.δ.ο. $\exists \xi_1, \xi_2 \in (-5,5): \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$
2832. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη, πρώτη παράγωγο συνεχής, $f(0) = f(1) - 1$, $f'(0) > 0$,
 • ν.δ.ο. υπάρχει $x_0 \in (0,1): f'(x_0) = 2x_0$ και
 • επιπλέον ν.δ.ο. $\exists \xi \in (0, x_0): f'(\xi) = 3\xi$
2833. Να βρεις την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = a^{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = h(x)^x$, h παραγωγίσιμη.
2834. Δίνεται συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f^2(a) - f^2(b) = a^2 - b^2$,
 ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a,b) για την εξίσωση $f(x)f'(x) = x$
2835. Δίνεται συνάρτηση $f: f(2) = 2016, |f'(x)| \leq 2, \forall x \in (2,4) \Rightarrow 2012 \leq f(4) \leq 2020$
2836. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[a,b]$, παραγωγίσιμες στο (a,b) με $f(a) = f(b) = 0$, ν.δ.ο.
 υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (a,b): f(x)g'(x) = -f'(x)g(x)$
2837. Ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a,b) για την εξίσωση $f'(x)(x^2+1) + 2xf(x) = 0$ όταν
 τα α, β είναι ρίζες της f .
2838. Έστω συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a) + f(b) = 0$, ν.δ.ο.
 υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ να είναι μία τουλάχιστον ρίζα της $f(x) = 0$ ή μία τουλάχιστον ρίζα της
 $f'(x) = 0$.
2839. Έστω συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f'(a) = f(b)$, $f'(b) = f(a)$,
 ν.δ.ο. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$ ή $f''(\xi) + f(\xi) = 0$



2840. Έστω συνάρτηση g συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $\alpha > 1$, $f(a) \ln b = f(b) \ln a$

,ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\xi \ln \xi}$

2841. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

- η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.
- υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$
- υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

2842. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ \left(1 - e^{-x+1}\right) \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1}$
- Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.
- Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x' .

2843. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.
- Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, 0)$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.
- Αν $\alpha > 2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x' .

2844. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
- Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.
- Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ) : $y = -\frac{1}{668}x + 2005$.



2845.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$, με $x > 0$.

- Να βρείτε τα όρια i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2}$
- Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο O(0,0) τη μικρότερη απόσταση.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 6$.

2846.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} + 2x$, $x \neq 0$. Να βρείτε:

- Τα τοπικά ακρότατα της f.
- Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.
- Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(1, f(1)).
- Το σημείο M(ξ, f(ξ)), $\xi > 0$, της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AB με A(1, f(1)), B(3, f(3)).

2847.

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < 0 < \beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5\alpha$, να αποδείξετε ότι:

- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .
- Υπάρχει σημείο M(ξ, f(ξ)) της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon: x - 5y + 2010 = 0$.
- Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

2848.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες
- Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M(ξ, f(ξ)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



2849. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a .
- Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

2850. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.
- Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $(3, 0)$.

2851. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $xf(x) + \sin x = 1 - x^2 \eta \mu \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x} - x \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
- Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f για κάθε $x \neq 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.

2852. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , όπου $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$, $x \in (0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$.



2853. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, τότε:

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = -12$
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) \geq \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1} \quad \mu\epsilon \quad x \in (0, +\infty)$$

- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^v} \eta\mu \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)$ για τις διάφορες ακέραιες τιμές του v .

2854. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1, B2, B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

2855. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

2856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$

- Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής. Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$
- Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.



- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

2857. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.
Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq 1$.
- Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\triangle MOK$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

2858. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2}$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και τύπο $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2-1}$.
- Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο $\mathbb{R}$.
- Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $x_0=2$ της συνάρτησης $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x-2}$.

• Έστω η συνάρτηση $\phi(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in A \\ 1-x^2, & x \in (-1,1) \end{cases}$. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του

θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\phi(x) \cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,2]$.

2859. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
- Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$
- Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- **Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.**

2860. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f(a)=f(b)=0$, Ν.δ. ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (a,b) : f'(\xi) + f(\xi)f''(\xi) = 0$$

2861.



2862. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, με πρώτη παράγωγο συνεχή στο $[0,1]$,

$$f(0) = f(1) - 1, f'(0) > 0,$$

- ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$: $f'(\xi) = 2\xi$
- ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $m \in (0,\xi)$: $f'(m) = 3m$

2863. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $g(x) = \ln x + x + 1$, $x \in [1, e]$

- Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για τις f, g στα αντίστοιχα διαστήματα.
- Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. στα αντίστοιχα διαστήματα.

2864. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^3 - x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$

- Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[-3,2]$.
- Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-3,2]$, να το εφαρμόσετε και να βρείτε τα ξ που το επαληθεύουν.

2865. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x + \beta, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε για την f να εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-2,2]$.
- Για τις τιμές των α, β του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την $f'(x)$ και να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-2,2]$.

2866. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 1 \\ \beta x^2 + 2x + \alpha, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε τα α και β , ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$ και να εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0,2]$.
- Να βρείτε σημείο $M(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία: $(\epsilon): 8x - y + 2023 = 0$

2867. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -1$.

2868. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) . Αν $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x - 2y + 3 = 0$.

2869. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[-2,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2,2)$, $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$.



- Να εφαρμόσετε για την f το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$.
- Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

2870. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ με: $f(-\alpha) = -f(\alpha) = -\alpha$. Αν $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-\alpha, \alpha)$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

2871. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

- για τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$,
- υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

2872. Μια συνάρτηση $f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και

$$f(-2) = 5, f(0) = 1, f(2) = -3.$$

- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2,2)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = -2$.
- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$

2873. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και ισχύουν $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$ και $f(\gamma) = \gamma$ για κάποιο $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

2874. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν γ είναι σημείο του (α, β) τέτοιο, ώστε: $\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f''(\xi) = 0$.

2875. Έστω $\alpha > 0$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$. Αν: $2g(0) = g(\alpha) + g(-\alpha)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0$

2876. Μια συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $f(-1) = -1, f(0) = 1, f(1) = -2$.

- Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.
- Αν η f' είναι συνεχής στο $(-1,1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -6$.

2877. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\Delta = [0,1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = 1 - \gamma$,
- υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha \neq \beta$ τέτοια, ώστε: $f'(\alpha)f'(\beta) = 1$



2878. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$,
- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1)f'(x_2) = 1$

2879. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με: $(f(\gamma) - f(\alpha))(f(\beta) - f(\gamma)) < 0$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα x' τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

2880. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = \frac{1}{2}$,
- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$

2881. Έστω μια συνεχής συνάρτηση: $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(0) \neq f(2)$,
- υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε: $5f(x_0) = 2f(0) + 3f(2)$
- υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε: $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi_3)}$

2882. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \gamma < \beta$.

- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με: $(\beta - \alpha)f'(\xi_1) + (\gamma - \beta)f'(\xi_2) = f(\gamma) - f(\alpha)$
- Αν είναι: $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία:
 $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta)), \Gamma(\gamma, f(\gamma))$ δεν μπορούν να είναι συνευθειακά.

2883. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $f(\gamma) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.

2884. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με: $f(0) > 0$ και $f(1) = f'(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) > 0$

2885. Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2006$, να αποδείξετε ότι $2004 \leq f(2) \leq 2008$.

2886. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x \in [\alpha, \beta], \alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha}$
- $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$

2887. Να αποδείξετε ότι:

- $e^\alpha(\beta - \alpha) < e^\beta - e^\alpha < e^\beta(\beta - \alpha)$ για κάθε $\alpha < \beta$



$$\bullet \quad 2^\alpha \ln 2 < \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} < 2^\beta \ln 2 \text{ για κάθε } \alpha < \beta$$

2888. Να αποδείξεις ότι :

- αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$
- αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε: $\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} < \epsilon \phi \alpha - \epsilon \phi \beta < \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}$
- $|\eta \mu \alpha - \eta \mu \beta| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $e^\beta - e^\alpha < \beta e^\beta - \alpha e^\alpha$

2889. Να αποδείξετε ότι:

- $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$
- $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

2890. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε η f' να είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι:

- $f'(0) < \frac{f(2) - f(0)}{2} < f'(2)$
- $2f'(1) + f(1) < f(3) < 2f'(3) + f(1)$
- $f(4) + f(5) < f(1) + f(8)$

2891. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta)$
- Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $f'(\beta) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\alpha)$

2892. 19.55 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. α) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

- $f'(\alpha) < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(x)$ για κάθε $x > \alpha$
- $f'(x) < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(\alpha)$ για κάθε $x < \alpha$

Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- $f'(x) < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(\alpha)$ για κάθε $x > \alpha$
- $f'(\alpha) < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(x)$ για κάθε $x < \alpha$

2893. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος f' είναι γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι:

- $f'(x) < f(x + 1) - f(x) < f'(x + 1)$ για κάθε $x > 0$
- $2f'(x + 1) + f(x + 1) < f(x + 3) < 2f'(x + 3) + f(x + 1)$ για κάθε $x > 0$

2894. Να αποδείξετε ότι:



- $e^x < \frac{e^{x+1}-1}{x} < 1$ για κάθε $x > 0$
- $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ για κάθε $x > 0$

2895. Να αποδείξετε ότι:

- $1 < \frac{e^{x-1}-1}{x} < e^x$ για κάθε $x > 0$
- $x+1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in [0,1)$
- $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(x+1)} < 1 + \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

2896. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

- Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α, β) , να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
- Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, β) , να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
- Αν $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- Να αποδείξετε ότι $2e^4 < e^3 + e^5$.
- Να αποδείξετε ότι $\ln 3 + \ln 7 < 2\ln 5$.

2897. Να αποδείξετε ότι :

- Αν $ae > be > 1$, να αποδείξετε ότι: $a^a > b^b$.
- Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha+1}{\alpha+2} < \ln(\alpha+2) < \alpha+1$ για κάθε $\alpha > -1$.

2898. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

2899. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε $2f'(\xi_1) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$.

2900. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6$.

2901. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $2f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ και $x_1 \neq x_2$.

2902. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και: $f(\beta) - f(\alpha) = 2(\beta - \alpha)$ Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 10$.

2903. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

- Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ (διαφορετικά ανά δύο), ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 3f'(\xi)$$

2904. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .



- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2f'(\xi)$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 5f'(\xi)$.
- Αν $f(\alpha) < f(\beta)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε: $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$

2905. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με: $f(\beta) - f(\alpha) = 3(\beta - \alpha)$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - y + 2 = 0$,
- υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}$

2906. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\epsilon): y = 4x + 3$.
- Να εφαρμόσετε για την f το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 4]$ και να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, 4)$.

Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$, με $\alpha > 0$, κινείται στη C_f με τέτοιο τρόπο, ώστε $\alpha'(t) = 2$ cm/s. Η εφαπτομένη της C_f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $N(x, 0)$ και σχηματίζει γωνία φ . Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ που είναι $\alpha(t_0) = 1$ cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- της τεταγμένης β ,
- της τετμημένης x ,
- της γωνίας φ .

2907. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 - 1".
- Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία: $(\epsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$ (Θέμα εξετάσεων)

2908. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και:

$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ Να αποδείξετε ότι:

- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,
- υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$



- υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $\frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)} = 2 \cdot \frac{\beta - x_0}{x_0 - \alpha}$ δ) υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 τέτοια, ώστε: $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{3}{f'(\xi_3)}$

2909. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως μονότονη.

Ακόμη ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 < f'(3)$

- Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- Να αποδείξετε ότι: $4 + f(1) < f(3) < 2f'(3) + f(1)$
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f(x+2) > 2f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δίνεται ακόμη ότι $f(1) = 4$.

- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(1, f(1))$.
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 16}{x^2 - 1}$.

2910. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = 3$ και $f'(1) = 4$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 4x - 1$ για κάθε $x \geq 1$
- $f(x) \geq 4x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$
- $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x^2}{x^2 - 1}$

2911. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta), \delta \in (\alpha, \beta)$ έτσι, ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) ,
- υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$ γ) η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Θέμα εξετάσεων)

2912. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως μονότονη.

Ακόμη ισχύουν: $f(0) = 1, f(2) = -5, f(4) = 3$

- Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τουλάχιστον δύο σημεία.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.



- Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)-3}{x-4} > 4$ για κάθε $x > 4$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

2913. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h} \right| \leq 9 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h} = 3f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $-3 \leq f'(x) \leq 3$

Έστω $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$.

- Να αποδείξετε ότι $|f(0)| \leq 3$.
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f'(x)+x}$.

kglykos.gr

**A10. Θεώρημα**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απάντηση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A11. Θεώρημα

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

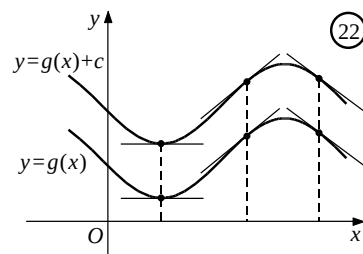
Απάντηση

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

Σχόλιο

Τα παραπάνω θεωρήματα (3 και 4) ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.



Άρα,

**36. Πρόταση (χωρίς απόδειξη)**

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση: Αντί του $\mathbb{R}$ μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ .

A12. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Απάντηση

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.
- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Θεώρημα Fermat

A13. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1) Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

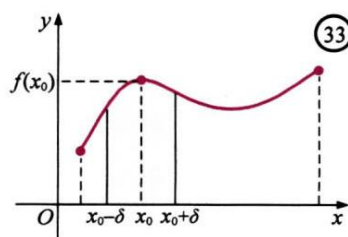
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

$$\text{— αν } x \in (x_0 - \delta, x_0), \text{ τότε, λόγω της (1), θα είναι } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ οπότε θα έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (2)$$

$$\text{— αν } x \in (x_0, x_0 + \delta), \text{ τότε, λόγω της (1), θα είναι } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ οπότε θα έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.



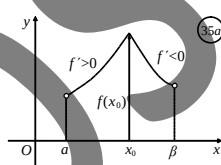
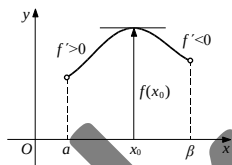
**A14. Θεώρημα**

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f (Σχ. 35α).
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f (Σχ. 35β).
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) (Σχ. 35γ).

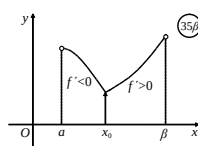
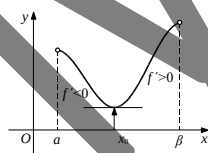
Απόδειξη

- i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1). Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).

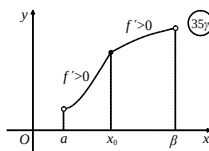
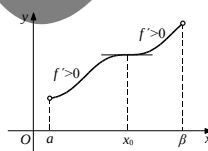


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

- ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



- iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.



— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

38. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ

Απάντηση

α) **Κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

39. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα σε μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα;

Απάντηση

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

Μέθοδος-Κριτήριο:

45. Πώς καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της;

**Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

