



Παράγωγοι ΚΑΤΕ



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
340 ασκήσεις
και τεχνικές
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ σε 51 σελίδες

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Τα πάντα είναι
παράγωγοι

Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών

**Να βρεις σύνολο τιμών και πλήθος ριζών
στις συναρτήσεις :**

1418. $f(x) = x^2 - 4x$

$[-4, +\infty)$

1419. $f(x) = 4 - x^2$

$(-\infty, 4]$

1420. $f(x) = x^3 - 3x^2$

$\mathbb{R}$

1421. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\mathbb{R}$

1422. $f(x) = 6x^2 - x^3$

$\mathbb{R}$

1423. $f(x) = \frac{1}{x}$

$\mathbb{R}^*$

1424. $f(x) = xe^x$

$\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

1425. $f(x) = x \ln x$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ

Φτιάχνεις τον πίνακα μεταβολών προσήμου της f' συμπληρώνεις τις τιμές της συνάρτησης για όλα τα x είτε ορίζονται (υπολόγισε $f(\dots)$), είτε όχι (υπολόγισε $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$) ακόμα και στο $\pm\infty$ (υπολόγισε

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$). Απομένει να διαβάσεις τον πίνακα.

Το σύνολο τιμών

είναι το διάστημα με τη μικρότερη τιμή, τη μεγαλύτερη τιμή. Αν το πεδίο ορισμού διακόπτεται σε κάποιες τιμές του x τότε το σύνολο τιμών είναι η ένωση των επιμέρους συνόλων τιμών.

Το πλήθος ριζών

υπολογίζεται πολύ εύκολα βλέποντας πόσες φορές ισχύει Bolzano σε κάθε διάστημα στο πινακάκι. Το νου σου, μην ξεχάσεις να προσθέσεις και τις έτοιμες ρίζες (τα x τα οποία τα $f(x)=0$).

Το πρόσημο συνάρτησης

είναι απαραίτητο να βρεις τις ρίζες (εφόσον υπάρχουν) ακόμα και με το μάτι ώστε να διαβάσεις σωστά τον πίνακα.



$$\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

1426. $f(x) = \frac{x-1}{x}$

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

1427. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$$\mathbb{R}^*$$

1428. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$$(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

1429. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

$$[0, +\infty)$$

1430. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$$[0, 3]$$

1431. $f(x) = (x^2 - 1)^3$

$$[-1, +\infty)$$

1432. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$$(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

1433. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

$$\left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$$

1434. $f(x) = x^2 \ln x$

$$\left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

1435. $f(x) = x^3 - 3x$

$$\mathbb{R}$$



1436. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$[0,1]$

1437. $f(x) = 3e^x - 2x - 2$

$\left[\ln \frac{9}{4}, +\infty\right)$

1438. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$\mathbb{R}$

1439. $f(x) = x^3 - ax^2, a \neq 0$

$\mathbb{R}$

1440. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$

$(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$

1441. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 4, & x \in [-1, 2) \\ 2x - 2, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$

$[2, +\infty)$

1442. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

$\mathbb{R}$

Να βρεις σύνολο τιμών για τις συναρτήσεις :

1443. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} - 2021$

$\mathbb{R}$

1444. $g(x) = x^4 - 4x + 6$

$[3, +\infty)$

1445. $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}}$

$(-1, 1)$

1446. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$



$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

1447. $h(x) = \frac{\eta\mu x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$\left[\frac{2}{\pi}, 1 \right)$$

1448. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 0$.

1449. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ακριβώς πραγματικές ρίζες, δύο αρνητικές και δύο θετικές.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

1450. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 0$.

1451. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $3x^2 + 12x = 3 + 2x^3$.

1452. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

1453. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

- $f(x) = e^x - x - 2$
- $g(x) = \ln x - x + 2$
- $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$

1454. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$

1455. Όταν η παράμετρος α διατρέχει το σύνολο $\mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:



- $2x^3 - 15x^2 + 24x - \alpha = 0$
- $3x^4 - 4\alpha x^3 + \alpha = 0$

1456. Δίνεται η $f(x) = 1 - e^{-x^2}$

- να βρεις το σύνολο τιμών της .
- Επιπλέον ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη
- ενώ η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{4}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

$[0,1)$

1457. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : f(x) = \ln x, g(x) = 1 - x$, να βρεις τα κοινά τους σημεία

$x=1$

1458. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : f(x) = xe^x, g(x) = 1$, να βρεις πόσα κοινά σημεία έχουν .

1459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x$

- να βρεις μονοτονία
- να λύσεις την εξίσωση : $3^{k^2-4} - 3^{k-2} = (k-2) - (k^2-4)$

$\uparrow, -1, 2$

1460. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

- να βρεις μονοτονία ,
- σύνολο τιμών ,
- την $f^{-1}(x)$

$\uparrow, (-1,1), \ln \frac{1+x}{1-x}$

1461. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : f^3(x) + f(x) = e^x$,

- να βρεις τη μονοτονία ,
- την αντίστροφη συνάρτηση και
- να λύσεις την ανίσωση : $f(x^3 - x) > f(2x - 2)$

$\uparrow, \ln(x^3 + x), (-2, +\infty)$

1462. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1$, να μελετήσεις τη μονοτονία της .



1463. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4x)\ln x - x^2 + 6x$, να μελετήσεις τη μονοτονία της

1464. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με κοίλα άνω .Ν.δ.ο.

$$2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$$

1465. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

- Να βρεις πεδίο ορισμού ,
- μονοτονία ,
- σύνολο τιμών ,
- $f^{-1}(x)$

$$(-1,1), \uparrow, \mathbb{R}, \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

1466. Να βρεις τα ακρότατα της $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$\pm 1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1467. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - 2x - 2$,

- να βρεις ακρότατα .
- Ν.δ.ο. $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Ν.δ.ο. $f(e^x) \leq f(x+1), \forall x \leq 0$
- Επιπλέον ν.δ.ο. ότι η εξίσωση $2e^x = 2x+2$ έχει μοναδική λύση .

1468. Ν.δ.ο. $e^{2x} \geq x + \ln \sqrt{2e}$

1469. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{k}{x} + k$, με τιμές στο

- Ν.δ.ο. $k=-1$,
- να βρεις μονοτονία και
- ακρότατα ,
- να λύσεις την εξίσωση $f(x) = 0$ και

$$\text{να λύσεις την ανίσωση : } \ln\left(2a^2 + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{a^2 + \frac{5}{2}} > \ln\left(a^2 + \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2a^2 + \frac{3}{2}}$$

1470. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln^2 x, g(x) = \ln x$,

- να βρεις τα σύνολα τιμών τους ,



$[0, +\infty)$.



- τη σχετική τους θέση .

$$[0, +\infty), \mathbb{R}$$

1471. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)e^{-x}$,

- να βρεις μονοτονία και
- ακρότατα .
- Αν $0 < k < \frac{1}{e^2} \Rightarrow$ η εξίσωση $(x-1)e^{-x} = k$ έχει ακριβώς 2 λύσεις .

1472. Δίνεται η $f(x) = \frac{x^2 + ax}{bx - 2}, b \neq 0$,

- να βρεις πεδίο ορισμού ,
- να βρεις τα α, β ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία -2 και 6

$$a = 6, b = 1$$

1473. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \ln(x+1) + (x+1)^{2021} - 1, g(x) = \sin x - x - 1$, ν.δ.ο. οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο και να βρεις .

$$x = 0$$

1474. Δίνεται συνάρτηση : $f(x) = e^x - x, x \geq 0$

- Ν.δ.ο. είναι 1-1 .
- Να λύσεις την εξίσωση $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2$

$$x = \pm 2$$

1475. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \ln(x^2 + 1), a \in \mathbb{R}$, να βρεις το a ώστε να είναι γνησίως φθίνουσα

στο $\mathbb{R}$

$$a \in (-\infty, -1]$$

1476. Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι : $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.



1477. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

- Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

1478. Για $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Για $k = 3$

- να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
- και για κάθε $\alpha \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

1479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

1480. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

$$f(x) = e^x - (x + 1).$$

- Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.
- Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

1481. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
- Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

1482. Δίνεται μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.



- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.
- Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x)-3x)=f(x^2+2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

1483. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + \sin x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2+8)=f(6x)$
- Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x}$

1484. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

- Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$

1485. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - bx - a$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $b > 0$.

- Να βρεις μονοτονία
- να βρεις σύνολο τιμών και
- ν.δ.ο. η εξίσωση $a^x = bx + a + 2022$ έχει ακριβώς μία ρίζα

↓, $\mathbb{R}$

1486. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$
- $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x + 10$
- $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 11\frac{x^2}{2} - 6x + 1$



- $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$
- $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x - 1$

1487. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x + 10$.

- Να βρείτε την f' και την f'' .
- Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να μελετήσετε την f' ως προς τη μονοτονία.

1488. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$
- $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$
- $h(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$
- $\varphi(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3}$

1489. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x)$
- $f'(x)$

1490. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = x \ln x - x + 1$
- $f(x) = e^x - x$

1491. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \ln|x| + \frac{2}{x^2}$
- $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$
- $f(x) = 2(\ln x - 1)(x^2 - 2x) - (x - 2)^2 + 5$
- $f(x) = 2xe^x - e(x + 1)^2$
- $f(x) = (x + 1)^2 - 2xe^{x-1} + 2$

1492. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

1493. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = e^x \eta \mu x, \quad x \in [0, 2\pi]$



- $f(x) = 2\eta\mu x + x, \quad x \in [0, \pi]$
- $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi]$
- $f(x) = \ln(\eta\mu x) + x, \quad x \in (0, \pi)$

1494. 1.59 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [-5\pi, 4\pi]$
- $f(x) = \eta\mu x + x, \quad x \in \mathbb{R}$

1495. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 10, & \text{αν } x \geq 1 \\ -3x^3 + 9x^2 - 15x + 22, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

1496. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 9x^2 + 12x + 16, & \text{αν } x < 1 \\ 2x^3 - 27x^2 + 84x - 20, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -12(x+2)e^{-x}, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 24, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 - \eta\mu x, & \text{αν } x \in [-\pi, 0) \\ \sigma\upsilon\nu x - x, & \text{αν } x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

1497. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x + 1 - x$ και $g(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι: $x \geq \ln x + 1$ για κάθε $x > 0$.
- Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

1498. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x - 2 - x \ln x$ και $g(x) = \frac{\ln x}{x-2}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι: $x < 2 + x \ln x$ για κάθε $x > 0$.
- Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

1499. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ και $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της g .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1500. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1501. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1502. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x$, $x > 0$.

- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1503. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

- $(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$
- $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1504. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 0$.

- Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1505. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f''(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(2) = f(2) = 0$.

- Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

1506. Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο των συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και επιπλέον:

- $f''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(1) = f(1) = 0$
- $g''(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$, $g'(0) = g(0) = 0$
- $f''(x) > 0$, $x \in (-\infty, 2)$, $f'(x) < 0$, $x \in (2, +\infty)$ και $f'(2) = f(2) = 0$
- $g''(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0)$, $g'(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$ και $g'(0) = g(0) = 0$

1507. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f^{(3)}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(0) = f'(0) = f(0) = 0$.



- Να βρείτε το πρόσημο της f'' .
- Να μελετήσετε την f' ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

1508. Στους επόμενους πίνακες δίνονται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f'(1) = 0$ καθώς και η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g'(2) = g''(2) = 0$. Επιπλέον δίνονται τα πρόσημα των f'' και $g^{(3)}$. Να βρείτε:

- τη μονοτονία και το πρόσημο της f' ,
- τη μονοτονία και το πρόσημο της f ,
- τη μονοτονία και το πρόσημο της g' ,
- τη μονοτονία της συνάρτησης g .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		-
$f'(x)$			
$f(x)$			

1509. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τις παραγώγους: $f'(x)$, $f''(x)$ και $f^{(3)}(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g^{(3)}(x)$	-		+
$g''(x)$			
$g'(x)$			
$g(x)$			

1510. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

- Να βρείτε τις παραγώγους: $f'(x)$, $f''(x)$ και $f^{(3)}(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f'(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.
- Να λύσετε την εξίσωση: $6x^2 \ln x = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$.

1511. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (1-x) \ln x + \frac{1}{x} + x - 2$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση: $(x - x^2) \ln x + x^2 = 2x - 1$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

1512. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - (x+2) \ln(x+1)$.

- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

1513. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο τις συναρτήσεις:

- $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$
- $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$



- $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$
- $f(x) = x^4 - 12x^2 + 24 - 24\sin x$

1514. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x-1)\ln x - x + 2$.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x - \frac{1}{x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1515. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = (x-1)e^x - x$, $x > 0$.

1516. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(x^2 - 3) = 1$ έχει ακριβώς δύο αρνητικές και μία θετική ρίζα.
- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - x + 1$.

1517. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$. Στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

1518. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - $f(-2) = f(2) = 0$

- Να αποδείξετε ότι η f' έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f' .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

1519. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $-f''(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0)$ και $f''(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$ - $f'(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f' .
- Να αποδείξετε ότι η f' έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0 < x_2$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

1520. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με: $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f(0) = f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι είναι: $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.



- 1521.** Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
- 1522.** Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με: $f'(\beta) = f(\alpha) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:
- η f είναι γνησίως αύξουσα,
 - $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- 1523.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: - η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ - $f(1) = 0$ - η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$, ώστε $(x-1)f'(\xi) = f(x)$.
- Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, $x > 1$. Να αποδείξετε ότι:
- $g'(x) = \frac{f'(x) - f'(1)}{x-1}$
 - η g είναι γνησίως αύξουσα.
- 1524.** Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- 1525.** Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και: $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, $x \neq \alpha$
- είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της,
 - είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.



Ασύμπτωτες

6. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f ;

Απάντηση

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

47. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Απάντηση

Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$).

48. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ (αντιστοίχως αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$).

49. Με ποιες σχέσεις(τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$;

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}, \text{ αντιστοίχως: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

Χρήσιμα σχόλια

1. Αποδεικνύεται ότι:

—Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

—Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.



—Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

1526. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + x}$$

$$y = 0, x = 0$$

1527. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$y = 0, x = 0$$

1528. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$h(x) = \frac{x-2}{x+5}$$

$$y = 1, x = -5$$

1529. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$f(x) = x \ln x$$

$$\emptyset$$

1530. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$g(x) = xe^{-x}$$

$$y = 0$$

1531. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$h(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$$

$$x = 0$$

1532. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$$

$$y = x - 4$$

1533. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

$$y = \pm x$$

1534. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $h(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x$

Α Σ Υ Μ Π Τ Ω Τ Ε Σ

- Οριζόντια : αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ τότε έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη την $y=a$
- Κατακόρυφη : αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε έχουμε κατακόρυφη την $x = x_0$
- Πλάγια : έχει τη μορφή $y=\lambda x+\beta$ όπου θα πρέπει

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \lambda x$$
 και $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

Στην οριζόντια και πλάγια μπορώ να έχω διαφορετικές ασύμπτωτες στο $+\infty, -\infty$.

Αν μία ευθεία είναι ασύμπτωτη τότε η f μπορεί να την τέμνει.

Μία συνάρτηση συνεχής σε κλειστό διάστημα δεν έχει ασύμπτωτες.

Αν έχω οριζόντια ασύμπτωτη τότε δεν έχω πλάγια

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις με βαθμό ≤ 1 έχουν ασύμπτωτη τον εαυτό τους ενώ αυτές με βαθμό ≥ 2 δεν έχουν ασύμπτωτη.

Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{f(x)}{g(x)}$:

αν έχουν κατακόρυφη θα είναι σε x που δεν ορίζεται ο παρονομαστής,

αν ο βαθμός αριθμητή $\leq$ βαθμό παρονομαστή έχουν οριζόντια ασύμπτωτη και όχι πλάγια,

αν ο βαθμός αριθμητή = βαθμό παρονομαστή + 1 τότε δεν έχουν οριζόντια αλλά έχουν πλάγια,

αν ο βαθμός αριθμητή $\geq$ βαθμό παρονομαστή + 2 τότε δεν έχουν ούτε οριζόντια, ούτε πλάγια.



$$y = \frac{3}{4}, y = -4x - \frac{3}{4}$$

1535. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

$$y = 0, x = \pm 1$$

1536. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{x^2 - 6x + 9}$

$$y = 1, x = 3$$

1537. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$

$$y = 1, x = \pm 1$$

1538. Να βρεις το a ώστε να έχει μία μόνο κατακόρυφη ασύμπτωτη η $f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 - 3x + 2}$

Συνάρτηση πολλαπλού τύπου

Μονοτονία και ακρότατα

Εξετάζω τη συνέχεια της συνάρτησης στα σημεία που αλλάζουν οι κλάδοι. Προσοχή δεν είναι απαραίτητο να εξετάσεις την παραγωγισιμότητα της f σ' αυτά τα σημεία. Βρίσκουμε την παράγωγο κάθε κλάδου και λύνουμε τις εξισώσεις $= 0$. Κατασκευάζεις πίνακα μεταβολών προσήμου ο οποίος συνδυάζει τους πίνακες προσήμων όλων των κλάδων. Από τον ενιαίο πίνακα βλέπω ξεκάθαρα τη μονοτονία. Για τα ακρότατα θα πρέπει να προσέξω ότι ακρότατο θα έχω όπου η συνάρτηση είναι συνεχής και αλλάζει η μονοτονία. Αξίζει να αναφερθεί ότι σε περιπτώσεις ασυνέχειας ακόμη και αν δεν αλλάζει η μονοτονία μπορώ να έχω ακρότατο, το οποίο το διαπιστώνεις με υπολογισμό των πλευρικών ορίων.

Κυρτότητα και σημεία καμψής

Εξετάζω τη συνέχεια της συνάρτησης στα σημεία που αλλάζουν οι κλάδοι. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο για κάθε κλάδο και φτιάχνουμε το πινακάκι. Ενώνω τα επιμέρους πινακάκια οπότε από το πρόσημο διαβάζω την κυρτότητα. Για τα σημεία καμψής δεν αρκεί μόνο η συνέχεια και η αλλαγή προσήμου της f'' , θα χρειαστώ να εξετάσω αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

1539. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$

$$y = 0$$

1540. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$y = 1, x = \pm 1$$

1541. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

$$y = x, x = 0$$

1542. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2}$



$$y = x, x = \pm\sqrt{2}$$

1543. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

$$x = 1$$

1544. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$y = \pm x$$

1545. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$

$$y = 0, y = 2x$$

1546. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

$$y = 0$$

1547. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \ln(x-2)$

$$x = 2$$

1548. Να βρεις τις ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = e^x - x$

$$y = -x$$

1549. Αν η συνάρτηση f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$: $y = 3x + 2$, να υπολογίσεις :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x \text{ και αν το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{af(x) + 6x}{xf(x) - 3x^2 + 5x} = 2 \Rightarrow a = ;$$

$$3, 2, \frac{8}{3}$$

1550. Αν για μία συνάρτηση ισχύει $x + 4 \leq f(x) \leq \frac{x^3 + 4x^2 + 1}{x^2}$, να βρεις τις πλάγιες ασύμπτωτες της

$$y = x + 4$$

1551. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : f(x) - g(x) = x - 4$. Αν η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι

ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, να βρεις : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$, την πλάγια ασύμπτωτη της g

στο $+\infty$

1552. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 1}, x \neq -1$, να βρεις α, β ώστε να έχει πλάγια ασύμπτωτη

στο $+\infty$: $y = x - 2$



$a=1, b=-1$

1553. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, f παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο, $f(0) = 0$, όπου ασύμπτωτη της g στο $+\infty$: $y = 2014x + 2012$, να βρεις την εφαπτομένη της f στο 0.

1554. Έστω ευθεία $y = 2x + 5$ ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = ; , \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = ; , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mf(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = ;$$

$2, 5, \frac{m+2}{4}$

1555. Αν ασύμπτωτη της f στο

$$-\infty: y = 3x + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = ;$$

1556. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου α ,

β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -4)$.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. (με χρήση ορισμού)

1557. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2)$, $x > -1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με λ -

1.

- Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω ότι $\lambda = -1$

- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

1558. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.





• Ν.δ.ο. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

1559. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Να αποδείξετε ότι

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη
- Η εξίσωση $f(x^3 - x + 1) = f(2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$

1560. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
- Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

1561. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

- Να βρεις το a ώστε συνεχής
- Για $a = 1$, ν.δ.ο. παραγωγίσιμη
- Να βρεις εφαπτομένη στο $x = 1$

1562. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

- Να βρεις μονοτονία
- Να βρεις ρίζες και πρόσημο της f''
- Να βρεις ασύμπτωτες της συνάρτησης

1563. Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) f(x) = x$, $f(0) = 1$

- Ν.δ.ο. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- Να βρεις το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$, $a \in \mathbb{R}$
- Να βρεις $f(A)$
- Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \sin x$

1564. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

- Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.



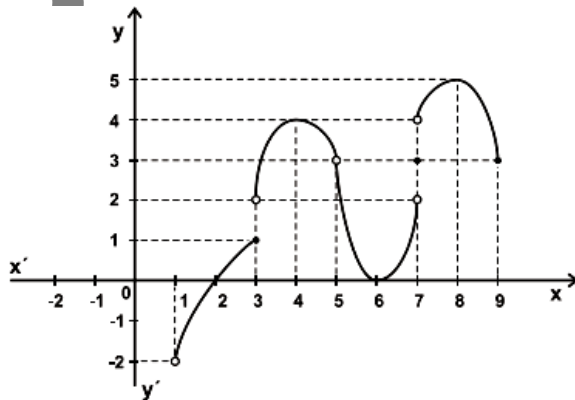
- Έστω $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)}$.

1565. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $xf(x) + \sin x = 1 - x^2 \sin \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{x} - x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
- Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f για κάθε $x \neq 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$

1566. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.
- α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
- Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.
- α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$
- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



1567. Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $h(x) = \ln x$.

- Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f με $f = g \circ h$.
- Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \sin x$ έχει λύση στο $(1, +\infty)$



1568. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \ln x, x > 0, g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

- Ν.δ.ο. $h(x) = f \circ g(x) = \ln \frac{x}{1-x}, x \in (0,1)$
- Ν.δ.ο. αντιστρέφεται η h και να βρεις την αντίστροφή της
- Αν $k(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$, να βρεις γι αυτήν μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, σημεία καμπής
- Να βρεις οριζόντιες ασύμπτωτες της k και να τη σχεδιάσεις

1569. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b, & x \leq 0 \\ x + 5, & x > 0 \end{cases}$

- Ν.δ.ο. $\beta = 5$
- Ν.δ.ο. παραγωγίσιμη
- Να βρεις εφαπτομένη στο $x = -1$

1570. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1, g(x) = \frac{3-5x}{x-2}, x \neq 2$

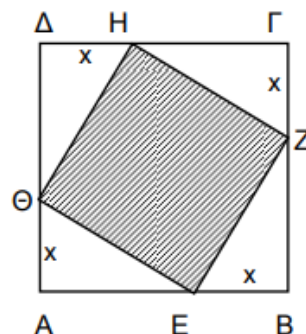
- Ν.δ.ο. $h(x) = f \circ g(x) = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}, x \in \left[\frac{5}{6}, 2\right)$
- Να βρεις μονοτονία και ακρότατα της h
- Να δείξεις ότι αντιστρέφεται η h και να βρεις την αντίστροφή της

1571. Δίνεται συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in [-1, 0) \\ \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

- Ν.δ.ο. η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$ και να βρεις τα κρίσιμα σημεία της
- Να βρεις μονοτονία, ακρότατα
- Να αποδείξεις ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από το $M(0, 3)$

1572. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ :

- Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.
- Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.



1573. Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}.$$



- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2, x < 0.$$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι $h(x) = \frac{x-1}{x}, x < 0.$
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

1574.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x$.

- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .
- Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.
- Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$. Αν $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$ να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

1575.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

1576.

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι $E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8)$
- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\pi^2$.

1577.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.



- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 3$ και η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της f είναι ακέραιος αριθμός.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x - 1 f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

1578. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα: $f(0) = 2$, $f(1) = 0$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.

Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

- Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2}$$

- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν

$$\text{υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}.$$

- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

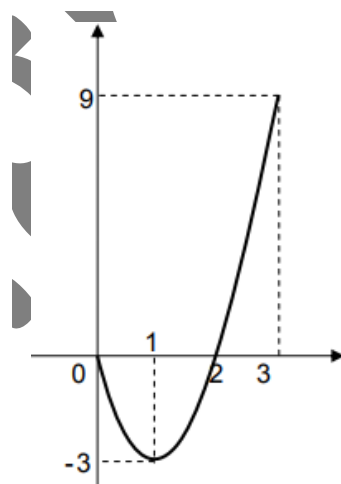
1579. Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) f(x) = x$, $f(0) = 1$

- Ν.δ.ο. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- Να βρεις το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$, $a \in \mathbb{R}$
- Να βρεις $f(A)$
- Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \sin x$

1580.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.





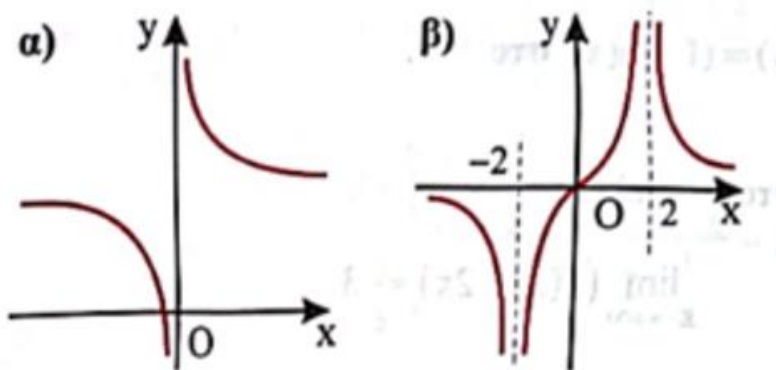
1581. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις : $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = x - 4$, $y = 3x - 7$ ασύμπτωτη της

f στο $+\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} =$; και επιπλέον ν.δ.ο. ασύμπτωτη της g

$y = 2x - 3$ στο $+\infty$

1582. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της

C_f στα παρακάτω σχήματα:



1583. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x$, $g(x) = \epsilon\phi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $h(x) =$

$$\begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ και } \varphi(x) = \frac{1}{x-2}$$

- Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g, h και φ
- να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες.

1584. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x+1}{|x-2|}$
- $g(x) = \frac{x^2+x-3}{x^2-2x+1}$
- $h(x) = \frac{2-x}{9-x^2}$
- $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

1585. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \\ x-1, & x \leq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \epsilon\phi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = \sigma\phi x$, $x \in (0, \pi)$
- $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$



- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

1586. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- $f(x) = x e^{\frac{1}{x^2}}$

- $f(x) = x^2 + \ln(x - 1)$

- $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x^2 + 1$

1587. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

- $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

- $f(x) = \frac{2x^2+x+5}{x^2+x+2}$

- $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

- $f(x) = \frac{|x-1|+x+2}{x^2-x+3}$

- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x+2}$

- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{e^x + e^{-x} + 3}$

1588. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$. Να βρείτε:

- τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f ,
- τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f .

1589. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-4}$

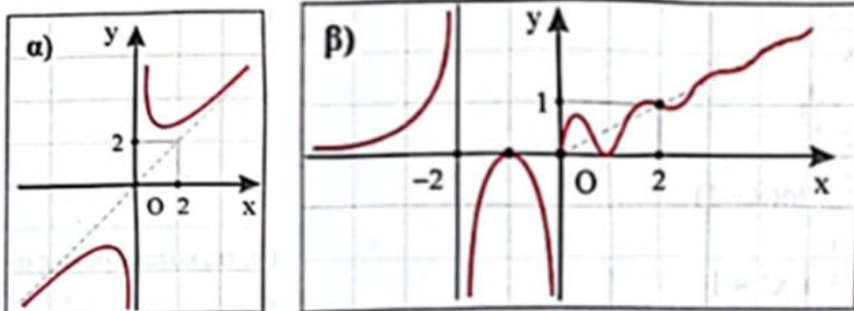
- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$



- $f(x) = \frac{e^x + e^{2x} + 1}{e^x - 1}$

1590. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f στα παρακάτω σχήματα.



1591. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$
- β) $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 6}{x - 2}$
- γ) $f(x) = x^4 + 3x^2 + x + 1$
- δ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

1592. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- α) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 2}$
- β) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x + 1}$
- γ) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$
- δ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x - 2}$
- ε) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$
- στ) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

1593. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- α) $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x^2 + 9}$
- β) $g(x) = x + 2 + \frac{4}{e^x + 2}$
- γ) $h(x) = \frac{3x^2 + 7x + 8}{x - 2}$
- δ) $\varphi(x) = \frac{x^3 + |4 - x^2| + x + 2}{x^2 - 1}$

1594. Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα: $2x < f(x) < 2x + \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

1595. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \frac{\eta\mu 2x}{x}$.



- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1)$.
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της C_f και της ασύμπτωτης που βρήκατε στο ερώτημα (β).

1596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2 + \frac{\eta\mu x}{x^2}$.

- Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ασύμπτωτη και η C_f έχουν άπειρα κοινά σημεία.

1597. Η ευθεία $y = 3x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Να υπολογίσετε $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$, $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x - 4)$.
- Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 6x}{x f(x) - 3x^2 + 5x + 2} = 1$.

1598. Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$. Να βρείτε τον

πραγματικό αριθμό λ , ώστε να είναι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3} \cdot f(x) + 2\lambda x^2 + x + 3}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2x - 1} = -4$.

1599. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y =$

$x + 2$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} \cdot f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4+1} - x^3 + 2} = 10$.

1600. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x - 2}$.

- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$.
- Ποιες είναι οι άλλες ασύμπτωτες της C_f ;

1601. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ , ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $x = -2$ και $y =$

$x - 4$ να είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x) = \frac{(\alpha-2)x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{2x + \gamma}$.

1602. Αν η ευθεία $(\epsilon): 2x - y + \beta = 0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$f(x) = \frac{(\alpha+1)x^2 - 2\alpha x + 3}{3x - 2}$ στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -2$.

1603. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 6}{x^2 - 4x + 3}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να έχει μόνο μία κατακόρυφη ασύμπτωτη.

1604. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $g(x) = 3f(x) + x + x\eta\mu \frac{2}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Η ευθεία $y = -x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. α) Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$.



- Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

1605. 5.36 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) - g(x) = x +$

3 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $y = 3x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Η άσκηση συνεχίζεται...)

1606. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(\alpha-2)x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{2x + \gamma}$ η γραφική παράσταση της οποίας έχει ως

ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -2$ και $y = x - 4$ στο $+\infty$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 4)$
- Να αποδείξετε ότι: $\gamma = 4$ και $\alpha = \beta = 2$
- Να υπολογίσετε τα όρια: $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{x^2}$ και $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$
- Αν $g(x) = f(x) + 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

1607. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $-f(x) - g(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ - η $y = 3x - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 5x + \eta \mu 2x}{x f(x) - 3x^2 + 1}$
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.
- Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 6x}{x f(x) - 3x^2 + 5x + 2} = -6$
- Να υπολογίσετε το όριο: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - f(x) + g(x) \right)$

1608. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $(\epsilon): y = \lambda x + \beta$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ όταν:

- η f είναι άρτια,
- η f είναι περιττή.

1609. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιοδική και μη σταθερή συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η C_f :

- δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$,
- δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

1610. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda^2 x + \beta(\lambda + 1)$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, όπου:

$$g(x) = (f \circ f)(x), \quad x \in \mathbb{R}$$



Κυρτότητα και σημεία καμπής

40. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται **κυρτή** ή **ότι στρέφει τα κοίλα άνω** σ' ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f λέγεται **κοίλη** ή **ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** στο Δ , αν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Σχόλιο

α) Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\curvearrowright$ (αντιστοίχως κοίλη χρησιμοποιούμε $\curvearrowleft$).

β) Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

41. Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f .

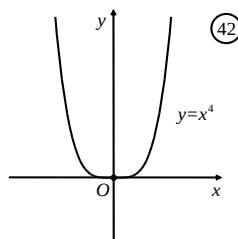
Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Σχόλιο

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.



42. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 .

Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f , όταν:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και



- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Σχόλιο

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.

43. Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

44. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

i) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.

ii) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Να βρεις κυρτότητα και σημεία καμπής :

1611. $f(x) = 2x - x^3$

ΣΚ : $x = 0$

1612. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ΣΚ : $x = e^{\frac{2}{3}}$

1613. $f(x) = xe^x$

ΣΚ : $x = -2$

1614. $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2$

ΣΚ : $x = \frac{6}{8}$

1615. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

ΣΚ : $\emptyset$

1616. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Κυρτότητα και σημεία καμπής

Υπολογίζεις την $f''(x)=0$ και φτιάχνεις το πινακάκι της . Η κυρτότητα διαβάζεται από το πρόσημο ,δηλαδή , για τα x όπου το πρόσημο είναι θετικό έχω κυρτή και για τα x όπου είναι αρνητικό έχω κοίλη . Στα σημεία όπου αλλάζει το πρόσημο έχω τα σημεία καμπής .

Κυρτότητα και εφαπτομένη($y=ax+\beta$)

αν η συνάρτηση είναι κυρτή τότε $f(x) \geq y$, ενώ αν η συνάρτηση είναι κοίλη τότε $f(x) \leq y$



ΣΚ:Ø

1617. $f(x) = x \ln x - 1$

ΣΚ:Ø

1618. $f(x) = |x^2 - 1|$

1619. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f \cup \Rightarrow g(x) = f(ax + b) \cup$

1620. Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^{-bx}$, $b > 0$, να βρεις το β ώστε να δέχεται ολικό μέγιστο στο 2, να βρεις κυρτότητα και σημεία καμπής.

1621. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x - bx^2 - x - 1$, να βρεις τα α , β ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει καμπή στο $x = 1$ και η εφαπτομένη της στο $x=e$ είναι // στην $y = x + 2$

1622. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + \gamma$, όπου διέρχεται από το σημείο $A(1,10)$, έχει ελάχιστο στο $x = 3$ και σημείο καμπής στο 2. Να βρεις τα α , β , γ

1623. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x - kx^2$, να βρεις τα ακρότατα και τα σημεία καμπής καθώς και το Γ.Τ. των εικόνων των σ.κ.

1624. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη, $xe^{f(x)} = f(x) + 1, \forall x > 0$ με τιμές στο

$(1, +\infty) \Rightarrow f'(x) = -\frac{e^{f(x)}}{f(x)}$, να βρεις μονοτονία και κυρτότητα.

1625. Δίνεται η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = f(\beta) = 2020$, δύο φορές παραγωγίσιμη, κοίλη. Ν.δ.ο. $f(x) \geq 2020$

1626. Δίνεται η συνάρτηση f κυρτή στο πεδίο ορισμού της ν.δ.ο. $f(a) + f(\beta) > 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$

1627. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2ae^x - x^2$, $a > 0$.

- Να βρεις τα διαστήματα κυρτότητας.
- Νδ.ο. η συνάρτηση έχει ένα σημείο καμπής το οποίο για κάθε $a > 0$ κινείται σε μία παραβολή

$y = 2 - x^2$

1628. Να βρεις σημεία καμπής της $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - x^3, & x \leq 0 \\ 4x^2 - x^3, & x > 0 \end{cases}$

1629. Να βρεις το a ώστε να είναι κοίλη η συνάρτηση $f(x) = (a-3)x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4a - 5$.

$a \leq 2$

1630. Να βρεις τα α , β για να έχει σημείο καμπής το $A(1,2)$ η $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - x + 2$



$a=3, b=-3$

1631. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6e^{x-a}$, να βρεις το γεωμετρικό τόπο του σημείου καμπής

$y = 3x^2 - 6$

1632. Δίνεται συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη, ν.δ.ο. μεταξύ δύο διαδοχικών ακρότατων υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής

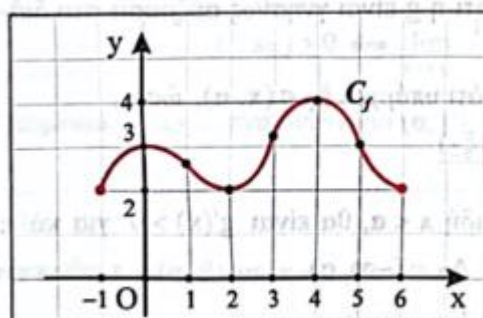
1633. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη και κυρτή ν.δ.ο. $f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$

1634. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

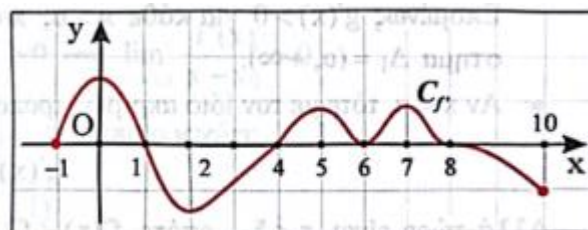
1635. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f , ορισμένης στο διάστημα $[-1, 6]$.

- Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της C_f .
- Ποια είναι τα διαστήματα μονοτονίας της f' και τα τοπικά της ακρότατα;
- Έχει η f ακρότατα στο διάστημα $[1, 6]$;



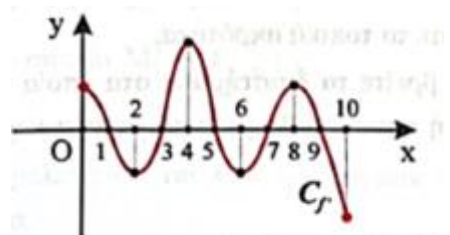
1636. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.

- Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- Να λύσετε τις ανισώσεις:
- $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, καθώς και τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή, καθώς και τα σημεία καμπής.



1637. Η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 10]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να βρείτε:

- τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .
- τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_f .





1638. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τις παρακάτω συναρτήσεις και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

- $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$
- $f(x) = \frac{x^6}{15} - \frac{3x^5}{10} + \frac{x^4}{3} - x + 2$
- $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$
- $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$
- $f(x) = 4\ln(x^2 + 8)$
- $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$

1639. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κοίλες ή κυρτές, καθώς και τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων, αν υπάρχουν.

- $f(x) = e^{2x} - 4(e^{x+1} + e^x) + 2e(x^2 - 1)$
- $g(x) = 1 + 2x^2 + 2x^2(\ln x - 2)^2$

1640. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τις παρακάτω συναρτήσεις και να βρείτε τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

- $f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 2x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^4 - 4x^3 + 2x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1, & \text{αν } x \leq 2 \\ (x-3)^5 + 2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

1641. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ Να μελετήσετε την f :

- ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα,
- ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

1642. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία καμπής της είναι κάθετες μεταξύ τους.

1643. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Αν x_1, x_2 και x_3 είναι αντίστοιχα οι θέσεις στις οποίες η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και σημείο καμπής, να αποδείξετε ότι τα αντίστοιχα σημεία της C_f είναι συνευθειακά.

1644. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x^3 - x)(3x^2 - 7) + 8x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής είναι συνευθειακά.



1645. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x - 2\ln x - \frac{1}{x}$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.
 - Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .
1646. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f :
- ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα,
 - ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης.
1647. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^2 \ln x$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f , να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Θέμα εξετάσεων)
1648. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4})$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
 - Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής της C_f .
1649. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (\ln x + 2x + 4)\ln x - 6x + 6$
- Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .
 - Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης: $g(x) = \ln x - x + 1$
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
 - Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
1650. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$ Να αποδείξετε ότι:
- η συνάρτηση f' έχει ελάχιστο το μηδέν και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα,
 - η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,
 - η f' είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.
1651. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 2x + 1$ Το $x_0 = 1$ είναι θέση σημείου καμπής της C_f .
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
1652. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$
- Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής στο $x_0 = \frac{3}{2}$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.



1653. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 36x + 5$ η οποία έχει στο σημείο $x_0 = 3$ τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση C_f έχει σημείο καμπής το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.
- Να βρείτε τις τιμές των α, β .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.
1654. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{(\alpha^2-2)x^4}{12} - \frac{(\alpha+1)x^3}{6} - \frac{\alpha x^2}{2} + 2x - 1$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Το σημείο $A(-1, f(-1))$ είναι σημείο καμπής της C_f . Να βρείτε:
- τις παραγώγους f' και f'' ,
 - τις τιμές της παραμέτρου α , γ) τα κοίλα και τα σημεία καμπής της f .
1655. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha \ln^2 x - x^3$, $x > 0$ Το $A(1, -1)$ είναι σημείο καμπής της C_f .
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
1656. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του α , ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 6x^2 + 3x + 2$ να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
1657. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α, β και γ , η συνάρτηση: $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + 12\beta x + \gamma$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
1658. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\lambda e^x - x^2$ με $\lambda > 0$ έχει μόνο σημείο καμπής, το οποίο κινείται στην παραβολή με εξίσωση $y = 2 - x^2$.
1659. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ έχει για κάθε τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα σημείο καμπής. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκει το σημείο καμπής της C_f .
1660. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 5\alpha x - 6\alpha^2 + 2\alpha^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής, το οποίο κινείται σε μια παραβολή.
1661. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^5 + 5\alpha x^4 + 10\beta x^3 + x^2 + x + 1$ παρουσιάζει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta$.
1662. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x + \gamma$ με $\alpha\beta < 0$
- Να εξετάσετε αν η f έχει σημεία καμπής.
 - Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να τέμνει τη C_f σε τρία σημεία.
1663. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
- $$f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x^2 + \alpha x + 1$$
- όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, δεν έχει σημεία καμπής.
1664. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.



1665. Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) + [f''(x)]^{2000} = \sin^2 x - 3x + e^{-x}$ Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

1666. Αφού διαπιστώσετε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα de L'Hospital, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\bullet A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$$

$$\bullet B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\bullet \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^3}$$

$$\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu 2x}{x - \pi}$$

1667. Να αποδείξετε ότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \eta\mu x}{x \eta\mu x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln x - x}{e^{x-1} - x} = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2e^x - x^2 - 2x - 2} = 3$$

1668. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\bullet A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x e^{x-x}}$$

$$\bullet B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu x}{\eta\mu x - x}$$

$$\bullet \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{e^x - 1 - x}$$

$$\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \epsilon\phi x}{1 - \sin 2x}$$

$$\bullet E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$$

$$\bullet \Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \eta\mu x - \sin 2x}{\eta\mu^2 x}$$

1669. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\bullet A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\bullet B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} \right)$$

1670. Να αποδείξετε ότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} = \frac{1}{6}$$



- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \eta \mu^3 x}{x^5} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\sin x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\eta \mu x - x)} = -\frac{1}{4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) - \eta \mu^2 x}{1 - e^{-x^2}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} - \sin x}{x^3 \eta \mu x} = \frac{1}{12}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\epsilon \phi x - \eta \mu x) - x^3}{x^5} = \frac{1}{4}$

1671.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^2 + 1}$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^3}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 1}{x}$
- $Z = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2 + 5}{e^x + 1}$
- $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x^2 + 3 \ln x + 2}$

1672.

Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 2}$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x + 1}{x^2 + 1}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^3 + x^2 + x + 1}$
- $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{\ln^2 x + 1}$
- $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln^2 x}{x^2 + \ln x}$
- $\Sigma T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- $Z = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}$



$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln x + 1}{x^2 + \ln x + 1}$$

1673.

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \text{ και ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} = 0.$$

$$\text{Να υπολογίσετε τα όρια: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x+1} \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \eta\mu x}{e^x + \sigma\upsilon\nu x}$$

1674.

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \eta\mu x}{e^x + x + 2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^{2x})}{\ln(x + e^x)}$$

1675.

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x^2)$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x})$$

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x)$$

$$E = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\Sigma T = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 e^{\frac{1}{x}} \right)$$

1676.

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln^2 x)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln^2 x + 1}{1 + \ln x}$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) x \right]$$

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((e^x - 1) \ln x)$$

$$E = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(x + 1)]$$

$$T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]$$

1677.

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(x^2 + 1)]$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$



$$\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sigma \phi x}$$

1678. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
- $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$
- $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$
- $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} + 2x - \ln x)$

1679. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\bullet A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^x)$
- $\bullet B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$
- $\bullet \Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - \ln^2 x)$
- $\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + \ln x)$

1680. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\bullet A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2e^x}{x + e^x}$
- $\bullet B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - e^x}{\sqrt{x} + 2 + e^x}$
- $\bullet \Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x + \ln x}{e^x + x + 3 \ln x}$
- $\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x^2 - \ln x + 2}$

1681. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$ Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\bullet \alpha) A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\bullet \beta) B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f^2(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right) \text{ (Θέμα εξετάσεων)}$

1682. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\bullet A = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e \phi x \cdot \ln x)$
- $\bullet B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2 x}{\ln x} \right]$
- $\bullet \Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(x - \ln(e^x + 1))]$
- $\bullet \Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\ln(x+1) - 2x}{(x+1)\ln^2(x+1) + 2x}$
- $\bullet E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\ln(x+1) - x\ln(x+1)}{x\ln^2(x+1)}$

1683. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\bullet A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$
- $\bullet B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^{\frac{1}{x}}$



$$\bullet \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x)^{x^2}$$

$$\bullet \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \eta \mu x)^{\frac{1}{x}}$$

1684. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\bullet \quad A = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \ln x)^x$$

$$\bullet \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)^{\frac{1}{x}}$$

1685. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\bullet \quad A = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon \phi x}{x} \right)^{\frac{1}{\eta \mu x}}$$

$$\bullet \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2}$$

$$\bullet \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^x$$

1686. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x + \beta \sin x}{x} = 2$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-2} = 5$$

1687. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \eta \mu x + \beta x}{x^3} = 1$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x + \beta e^{\eta \mu x}}{x - \eta \mu x} = 2$$

1688. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ , ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma x}{x - \eta \mu x} = 4$.

1689. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + \alpha, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{\beta x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

1690. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha^x + \beta^x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \sin(\alpha x) + \sin(\beta x), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

• Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\alpha, \beta > 0$.

• Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

1691. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x - \alpha \eta \mu x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ \beta + \alpha \ln(1 + x^4), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

• Να βρείτε τα α και β , ώστε η f να παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$.



- Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

Μελέτη συναρτήσεων

1692. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = x^2 - 4$
1693. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = 3x^2 - x^3$
1694. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = \frac{x-2}{x}$
1695. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = 2 + \ln x$
1696. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = 2 - e^{3x}$
1697. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = e^x - x$
1698. Να κάνεις τη $C_f : f(x) = \ln x - x$

Να γίνει η μελέτη των συναρτήσεων

1699. $f(x) = 3x^3 + 2x^2$
1700. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$
1701. $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$
1702. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
1703. $f(x) = -x^2 + 2x$
1704. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
1705. $f(x) = 3x^2 - x^3$
1706. $f(x) = x^4 - 2x^2$
1707. $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$
1708. $f(x) = e^x + 3$
1709. $f(x) = \ln(x-1) - 1$
1710. $f(x) = (x^2 - 1)^3$

Μελέτη συνάρτησης
Εξετάζω τα παρακάτω βήματα :

- Πεδίο ορισμού
- Περιοδική
- Συμμετρίες (άρτια ή περιττή)
- Συνέχεια
- Παραγωγισιμότητα
- Σημεία τομής με άξονες
- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Κυρτότητα
- Σημεία καμπής
- Πίνακας μεταβολών f', f'', f
- Γραφική παράσταση

 f'' Μελετά για την f

- Κυρτότητα
- Σημεία καμπής

Μελετά για την f'

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Σύνολο τιμών
- Πλήθος ριζών

 f' Μελετά για την f

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Σύνολο τιμών
- Πλήθος ριζών



1711. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

1712. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = x^3 e^{-x}$
- $g(x) = x \ln \frac{1}{x}$
- $h(x) = (e^x - 1) \ln x$
- $\varphi(x) = x^x, \quad x > 0$

1713. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1714. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) = x \ln^2 x$
- $f(x) = e^x - x + 1$
- $f(x) = x^2 + x - 1 - e^{-x}$
- $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

1715. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f(x) = x e^{2x} - \ln x + x^2 - 2x + 3$
- $g(x) = x e^{-x} - \ln x + \frac{2}{x}$

1716. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ Να

αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,
- η συνάρτηση g είναι συνεχής και μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

1717. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- Να βρείτε την f' και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.





- δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

1718.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & \text{αν } x \in (0,1) \cup (1, +\infty) \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι: i) η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ii) $f'(1) = -\frac{1}{2}$.
- Να βρείτε την $f'(x)$ και να την εξετάσετε ως προς τη συνέχεια.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της f .

1719.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} - \ln^2 x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι: $\frac{(x-1)^2}{x} \geq \ln^2 x$ για κάθε $x > 0$
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

1720.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη.
- Να βρείτε την παράγωγο της f και να εξετάσετε αν αυτή είναι συνεχής.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

1721.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x} \cdot \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.
- Να βρείτε, αν υπάρχει, την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$.
- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της C_f .

1722.

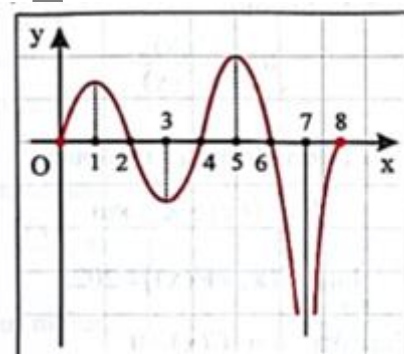
Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ (1 - e^{-x}) \ln x, & \text{αν } x \in (0,1] \end{cases}$



- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-x}}{x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$
- Να αποδείξετε ότι: i) η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$,
- η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x \ln x + e^{-x} - 1$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:
- η g έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο στο x_1 ,
- η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σ'ένα και μόνο σημείο x_2 με $x_2 > x_1$.

1723. Η πρόταση: «Αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι συνεχής» είναι λανθασμένη, διότι η f' δεν είναι πάντα συνεχής. Να βρείτε το λάθος στην “απόδειξη” του παραπάνω συμπεράσματος, η οποία ακολουθεί: «Έστω $\alpha \in D_{f'}$. Τότε: $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(f(x)-f(\alpha))'}{(x-\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x)$ Άρα $\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x) = f'(\alpha)$, οπότε η f' είναι συνεχής στο τυχαίο $\alpha \in D_{f'}$.»

1724. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,8]$ και η γραφική παράσταση της f' έχει τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x)-f(7)}{x-7}$.

1725. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $xf(x) + e^{\eta\mu x} = f(x)\eta\mu x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$
- $xe^x(f(x) + 2) = e^x(f(x)\eta\mu x + e^x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$

1726. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση:

$$f^5(x) + 5f(x) = x - \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}.$$

1727. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση:

$$e^{f(x)} + f(x) = \eta\mu x - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^4} = -\infty.$$

1728. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + 3f(x) = 3x\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$



- $f'(0) = 0$
- $f''(0) > 0$.

1729. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$, να αποδείξετε

$$\text{ότι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x + f(x)}{f'(x) \ln(x+1)} = 1$$

1730. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Να υπολογίσετε

$$\text{το όριο: } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - x^3}{x^4}$$

1731. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x)+2-3x)(e^{2x}+1)}{x^2} = 2023$

- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}+1}$
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

1732. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $g(x) = 2xf(e^{-x})$ Η ευθεία $y = 3x + 2$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: i) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x}$ ii) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(f(e^{-x}) - 2)]$
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

1733. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 6$ Να υπολογίσετε το $f'(1)$, όταν:

- η f' είναι συνεχής,
- η f' δεν είναι είναι συνεχής.

1734. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι:

- $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h} = 2f''(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h)-f'(x)}{h} = -f''(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- $\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+2h)+6f(x-h)-9f(x)}{3h^2} = 3f''(x), \quad x \in \mathbb{R}$

1735. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο: $L =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{10f(x+h)-15f(x-h)+8f(x-2h)-3f(x+3h)}{h^3}$$

1736. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(x+2h)+5f(x-2h)-3f(x-3h)-5f(x+h)}{h^3} = 10f^{(3)}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1737. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(3)}(x)}{xf''(x)} = e \quad \text{Να υπολογίσετε το όριο: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}.$$

1738. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 2023$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.



1739. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x) - 3f(x)) = -6045 \quad \text{Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$

1740. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 3, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\alpha}{x} - \beta x + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ Αν η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε:

- να αποδείξετε ότι $\alpha = 1, \beta = -2$ και $\gamma = 2$,
- να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα,
- να βρείτε, αν υπάρχουν, τις θέσεις των σημείων καμπής της f .

1741. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: $g(x) = f(x) + 2x + \ln(x+2) -$

$\ln x$ για κάθε $x > 0$ Η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \ln \frac{x+2}{x} \right)$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+2) - \ln x)$
- Να αποδείξετε ότι η C_g έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1$.

1742. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$,

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{\eta \mu x - x e^x},$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$$

Δίνεται ακόμη ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{f(x) - x}$.

1743. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 1$. α) Να αποδείξετε

$$\text{ότι: } f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \quad \beta) \quad \text{Να βρείτε τη συνάρτηση } f, \text{ αν ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = 12x^2 + 6x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1744. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.



- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x - xe^x}$

Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(0) = 1$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f , στο σημείο $M(0, f'(0))$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{x}$,

- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - x^2}{x^3}$

- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - x^3}{x^4}$

1745. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να λύσετε την εξίσωση: $e^x = (1+x)^{1+x}$, $x > -1$

1746. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

1747. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 4$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$

- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$

- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1 + f(x)}{x^2}$

- $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x)}{2x^2 - 1 + f(x)}$

1748. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 4$. Έστω:

1749. $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f'(0))$.

- Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και



- $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$
- $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{1 - \sin x}$
- Να αποδείξετε ότι $g'(0) = 2$.
- Να βρείτε την $g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $\Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu x}{x^2 + f(x)\eta\mu x}$
- $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x) - \eta\mu^2 x}{x\eta\mu x + \sin x - 1}$

1750.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 2x + 1 - x \ln^2 x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.
- Να υπολογίσετε τα όρια: i) $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ii) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της C_f .

1751.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να εξετάσετε αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο 0.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

1752.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν: -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) - f'(0) < f(1) - f(0) - f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(0, f(0))$.
- Να αποδείξετε ότι: i) η f είναι κυρτή,
- η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση, την οποία και να βρείτε.



- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xf(x) - x^2}$.

1753.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}, & \text{αν } x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- Να βρείτε την παράγωγο της f .
- Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

