



Παράγωγοι



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
222 ασκήσεις
και τεχνικές
σε 28 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

11/8/2026

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Ασκήσεις επανάληψης

Εκφράσεις :

- Η συνάρτηση έχει τ.ε. στο $x=2$
- Η συνάρτηση έχει τ.μ. στο $x=-3$
- Η συνάρτηση έχει ακρότατο στο $x=1$
- Η συνάρτηση έχει τ.μ. στο $A(1,3)$
- Η συνάρτηση έχει τ.ε στο 3 με τιμή 5
- Η συνάρτηση έχει σ.κ. στο $x=1$
- Η συνάρτηση έχει σ.κ. στο $A(3,5)$
- Το $f''(x) > 0$
- Το $f'''(x) < 0$



Άρα :

- $f'(2)=0, f(x) \geq f(2)$
- $f'(-3)=0, f(x) \leq f(-3)$
- $f'(1)=0$
- $f'(1)=0, f(1)=3, f(x) \leq 3$
- $f'(3)=0, f(3)=5, f(x) \geq 5$
- $f''(1)=0$
- $f''(3)=0, f(3)=5$
- $f' \uparrow, f \cup$
- $f'' \downarrow, f' \cap$

2914. Δίνεται η $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + \gamma$, η οποία διέρχεται από το $A(1,10)$, έχει ελάχιστο στο $x=3$ και σημείο καμπής για $x=2$.

- Να βρεις τα a, β, γ και
- τη μέγιστη τιμή στο διάστημα $[0,3]$.

2915. Έστω η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$,

- να υπολογίσεις : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2x]$ και
- να βρεις τον αριθμό $m : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mf(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

2,5,4



2916. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x - kx^2, k \in \mathbb{R}$,

- να βρεις ακρότατα και
- σημεία καμπής καθώς και
- το γ.τ.

$$y = -\frac{3}{2}x^2$$

2917. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x - bx^2 - x - 1$, να βρεις a, b ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=1$ και η εφαπτομένη στο σημείο $x=e$ να είναι παράλληλη στη διχοτόμο $1^{\text{ου}}, 3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου.

2918. Αν $g(x) = 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right), f(0) = 0, f$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και η ευθεία

$y = 2020x + 2021$ είναι ασύμπτωτη της g στο $+\infty$, να βρεις την εφαπτομένη της f στο $x=0$.

$$y = 1010x$$

2919. Αν $f(x) = xe^{-bx}, b > 0$ με ολικό μέγιστο στο σημείο $x=2$,

- να βρεις το b .
- Επιπλέον να βρεις κυρτότητα, σ.κ.

2920. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \ln(x^2 + 1), a \in \mathbb{R}$, να βρεις το a ώστε να είναι παντού γνησίως φθίνουσα.

2921. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{\frac{1}{x}} f(x), f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 f'(x), f(1) = 1$,

- ν.δ.ο. η g είναι σταθερή και
- να βρεις τη μονοτονία της f .

2922. Ν.δ.ο. οι παρακάτω συναρτήσεις οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν μοναδικό κοινό σημείο και να βρεθεί. $f(x) = \ln(x+1) + (x+1)^{2021} - 1, g(x) = \sin x - x - 1$

2923. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $1-1$, με πρώτη παράγωγο συνεχή και $1-1$, με $f'(2) = 0$,

$f \circ f'$ έχει ακρότατο στο 1 , να βρεις την τιμή $f^{-1}(2)$.

2924. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, να βρεις

- το μέγιστό της
- να συγκρίνεις τους αριθμούς $3^{\sqrt{5}}, 5^{\sqrt{3}}$



2925. Δίνεται συνάρτηση 3 φορές παραγωγίσιμη ώστε $e^{f(x)} + xf'(x) = e^x - x$. Αν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , να το βρεις.

2926. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 1}$, $x \neq -1$, $y = x - 2$ η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, να βρεις τα α, β .

2927. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^3(x) + f(x) = x$,

- να βρεις μονοτονία,
- το πρόσημό της,
- ν.δ.ο. έχει μοναδικό σημείο καμπής,
- να βρεις την αντίστροφη συνάρτηση.

$$\uparrow, \Sigma K: x=0, f^{-1}(x) = x^3 + x$$

2928. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + 3$. Να βρεις α, β ώστε η εφαπτομένη της στο $M(1, 5)$ να έχει κλίση 1

$$a=1, b=3$$

2929. Να βρεις α, β, γ ώστε να υπάρχει κοινή εφαπτομένη στο $A(1, 0)$ για τις

$$f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = cx - x^2$$

$$a=-3, b=2, c=1$$

2930. Αν f συνεχής στο α με $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - 3x + 2}{x - \alpha} = 0 \Rightarrow y = 3x - 2$ εφάπτεται στην f στο $x = \alpha$.

2931. Αν f άρτια και παραγωγίσιμη με $f(2) = 1, f'(2) = 5$, να βρεις

$$f'(-2)$$

$$f'(0)$$

$$-5, 0$$

2932. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = kx + x - \ln x, k > 0, x \in [1, 2]$,

- να βρεις μονοτονία και
- ν.δ.ο. $kx + x > 1 + k + \ln x, \forall x \in [1, 2]$

2933. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη, 1-1, με συνεχή, 1-1 πρώτη παράγωγο με $f'(2) = 0$. Αν η συνάρτηση $f \circ f$ έχει ακρότατο στο $x=1$, να βρεις την τιμή $f^{-1}(2)$

2934. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^3(x) + f(x) = x$ τότε



- ν.δ.ο. η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη ,
- να βρεις το πρόσημό της ,
- ν.δ.ο. έχει μοναδικό σημείο καμπής ,
- να βρεις την αντίστροφή της

2935. Να εξετάσεις αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} + x - 2, x > 1 \end{cases}$

2936. Ομοίως για τη συνάρτηση , $g(x) = 2x + \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}$

2937. Αν $x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + x + 2 \Rightarrow f(0) = ; , f'(0) = ;$

2938. Αν $|xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4, f \text{ συνεχής στο } 0 \Rightarrow f'(0) = ;$

2939. Δίνονται παραγωγίσιμες στο 0 συναρτήσεις : $f, g : f^2(x) + g^2(x) = x\eta\mu 2x$
 $\Rightarrow (f'(0))^2 + (g'(0))^2 = 2$

2940. Αν $g(x) = \begin{cases} f(x) \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, f(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

2941. Αν συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο 1 , $f, g : f(1) - g(1) = 1, f(x) \leq g(x) + x^2 \Rightarrow f'(1) - g'(1) = 2$

2942. Αν συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 ,

$g(x) = \begin{cases} f(x^3 + 1), x < 1 \\ f(2x), x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(2) = 0$

2943. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 2 , να βρεις α, β όταν $f(x) = \begin{cases} ax + b, x < 2 \\ \sqrt{x+2} - 2, x \geq 2 \end{cases}$

2944. Αν συνάρτηση συνεχής στο 1 με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2, g(x) = \sqrt{x^2 + 3} f(x) \Rightarrow g'(1) = ;$

4

2945. Αν $f(1) = 2, f'(1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 3f(x) - 2}{x^2 + x - 2} = ;$

-3

2946. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο α , υπολόγισε $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a} = ;$



$$a^2 f'(a) - 2af'(a)$$

2947. Αν συνάρτηση συνεχής στο 1 με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x - 1} = 2 \Rightarrow f'(1) = ;$

5

2948. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο α , υπολόγισε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{3h - \eta\mu 2h} = ;$

$$2f'(a)$$

2949. Αν $f(0) = 0, f'(0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(8x) - f(9x)}{f(10x) - f(11x)} = ;$

1

2950. Αν συναρτήσεις παραγωγίσιμες με $f(1) = 1, g(1) = 2, f'(1) = 4, f'(2) = 8, g'(1) = 3 \Rightarrow$

- $(f \circ g)'_{(1)} = ;$
- $(g \circ f)'_{(1)} = ;$

24,12



2951. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}, x + f(xe^x) = e^x \Rightarrow f'(e) = ;$

2952. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}, f(x^3) = 3x^4 + 1 \Rightarrow f'(0), f'(1) = ;$

2953. Αν $f(x) = |x^2 - 4x + 3| \Rightarrow f'(x) = ;$

2954. Αν συνάρτηση άρτια, να βρεις το είδος της πρώτης παραγώγου

2955. Αν συνάρτηση περιττή, να βρεις το είδος της πρώτης παραγώγου

2956. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, ν.δ.ο. αντιστρέφεται, να βρεις $(f^{-1})'(1) = ;$

$$\frac{1}{2}$$

2957. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη, $f(x+y) = f(x) - f(y) \Rightarrow f'(0) = ;$

2958. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$, να βρεις την εφαπτομένη στο $x=1$

2959. Δίνεται $f(x) = \frac{2}{x}$, εφαπτομένη στο σημείο Μ με τετμημένη $x = a$, η οποία τέμνει τους άξονες στα

σημεία Α, Β

- ν.δ.ο. το Μ είναι μέσο του ΑΒ
- ν.δ.ο. ότι το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό



2960. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(a-x) = f(a+x) + 2x$, ν.δ.ο. η εφαπτομένη στο $x=a$ είναι κάθετη στη διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου

2961. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(\ln x) = x \ln x - x$, να βρεις το εμβαδό που δημιουργεί η εφαπτομένη στο $x=1$ με τους άξονες

2962. Έστω συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$, να βρεις το την εφαπτομένη που είναι

- $// 2x - y + 3 = 0$
- $\perp x - y = 0$
- $// xx'$
- $\omega = \frac{\pi}{4} \mu\epsilon xx'$

2963. Αν $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, να βρεις την οριζόντια εφαπτομένη της f, f'

2964. Αν $f(x) = x^2 - 3x + 4, A(1, -2)$, να βρεις την εφαπτομένη στο A

2965. Αν $f(x) = x^3 + 3x, E = \frac{16}{9}$, να βρεις την εφαπτομένη της συνάρτησης που σχηματίζει με άξονες τρίγωνο με εμβαδό E

2966. Ν.δ.ο. από κάθε σημείο $M(a, -2)$ μπορείς να φέρεις εφαπτόμενες κάθετες προς τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2$$

2967. Έστω $f(x) = x^2 + (a-1)x - b, y = 2x + 3 \Rightarrow a, b = ?$ ώστε η ευθεία να εφάπτεται της συνάρτησης στο $M(-1, 1)$

2968. Αν ο άξονας xx' είναι εφαπτομένη της $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + a}{x - 1} \Rightarrow a = ?$

2969. Να βρεις α, β ώστε να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + ax + 1, g(x) = 2x^2 + x + b$$

2970. Η θέση κινητού πάνω στον οριζόντιο άξονα δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 6t + 5, t \in [0, 10]$.

- Ποια η ταχύτητα του μετά από 4 sec .
- Ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά ;
- Πόσο το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό;
- Ποια η επιτάχυνση του κινητού ;

2971. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ η μία πλευρά ΑΒ αυξάνεται με ρυθμό 2 ενώ πλευρά ΒΓ ελαττώνεται με ρυθμό 3, να βρεις τη χρονική στιγμή όπου $AB = 10, BC = 6$



- το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου και
- το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού

$$-2, -18$$

2972. Σε οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο με $AB=AG=10$ και $BΓ$ να αυξάνει με ρυθμό 2, να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που αυτό είναι ισόπλευρο.

$$\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

2973. Σκάλα μήκους 5μ είναι στερεωμένη σε τοίχο πλάγια και αρχίζει να ολισθαίνει το κάτω μέρος με ταχύτητα 1 τη χρονική στιγμή που απέχει 3μ. Να βρεις

- το ύψος στο οποίο είναι στερεωμένη η σκάλα,
- το ρυθμό μεταβολής του πάνω άκρου,
- το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού που δημιουργεί η σκάλα με τοίχο και δάπεδο,
- το ρυθμό μεταβολής της γωνίας μεταξύ σκάλας και τοίχου
- το ρυθμό μεταβολής της γωνίας μεταξύ σκάλας και δαπέδου

$$4, -\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$$

2974. Αντεστραμμένο κωνικό δοχείο ύψους 8μ και ακτίνα βάσης 4 είναι γεμάτο με νερό. Από την κορυφή του κώνου αρχίζει να φεύγει νερό με ρυθμό 12. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της στάθμης του νερού όταν το ύψος είναι 6.

2975. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln x, M(a, \ln a)$ σημείο της, να βρεις την εφαπτομένη στο M. Για ποια τιμή του α η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων; Αν το M απομακρύνεται από κατακόρυφο άξονα με ταχύτητα 2 να βρεις το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M όταν αυτό διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2976. Τυχαιο σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x + 3$. Τη χρονική στιγμή που η κλίση στο M είναι 25 και η τετμημένη αυξάνεται με ρυθμό 2, να βρεις την τετμημένη του M και το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M.

2977. Τυχαιο σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της $f(x) = (x-1)^3$. Η τετμημένη κινείται με σταθερό ρυθμό 1 πάνω στον ημιάξονα Ox , να βρεις

- μία σχέση που να συνδέει τη γωνία θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με xx' και την τετμημένη x .
- Να βρεις ρυθμό μεταβολής του θ τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη είναι $// y = 3x$.

2978. Να εξετάσεις αν ισχύει Rolle στην $f(x) = |x+2|, x \in [-4, 0]$

όχι



2979. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : f(x^2) \geq \frac{1+f^2(x)}{2}$, ν.δ.ο. υπάρχει σημείο όπου η εφαπτομένη // χχ'
2980. Αν συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b) = 0$, ν.δ.ο. υπάρχουν τουλάχιστον ένα $x_1, x_2 \in (a, b) : f''(x_1) = f''(x_2)$
2981. Ν.δ.ο. η εξίσωση $5x^4 - 8x^3 - 2ax + 2a = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο $(0, 2)$
2982. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη, ν.δ.ο. υπάρχει $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{2xf'(x)}{1-x^2}$
2983. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(a) = f(b) = 0$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (a, b) : f'(x) = 3f(x) \& f'(x) + 2xf(x) = 0$
2984. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$, $f'(x) \neq 0$, $f(3) = 0$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστο ένα $x \in (1, 3) : \frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0$
2985. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, $f(x) > 0$, $f(0) = \ln 2$, $f(1) = \ln(e+1) \Rightarrow \exists x \in (1, 3) : f'(x) = 2x(1 - e^{-f(x)})$
2986. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[1, 2] \Rightarrow \exists x \in (1, 2) : (x-1)(x-2)f'(x) = 3-2x$
2987. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, $af(b) = bf(a) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = cf'(c)$
2988. Συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, $f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$, $f'(0) > 0$
- Ν.δ.ο. $\exists a \in (0, 1) : f'(a) = a$
 - Ν.δ.ο. $\exists c \in (0, 1) : f'(c) = 2c$
2989. Ν.δ.ο. η εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(1, 2) : 4x^3 - 21x^2 + 18x + 6a = 0$
2990. Ν.δ.ο. η εξίσωση δε μπορεί να έχει παραπάνω από 2 ρίζες : $x^4 + ax^2 + bx + 10 = 0, a > 0$
2991. Να εξετάσεις αν εφαρμόζεται ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(x) = |2x-1|, x \in [0, 1]$
2992. Δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$, ν.δ.ο. υπάρχει τουλάχιστο ένα ξ που ανήκει στο (a, b) στο οποίο η εφαπτομένη να είναι κάθετη στην $x-2y+3=0$
2993. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3 \Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 1) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6$



2994. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2 \in (a, b) : 3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$

2995. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$$[a, b], f''(x) \neq 0, f(x) > 0, f(a)f'(b) = f'(a)f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : [f'(c)]^2 = f(c)f''(c)$$

2996. Δίνεται $f(x) = t^x$,

- να εφαρμόσεις το ΘΜΤ στα διαστήματα $[3, 4], [5, 6]$.
- Επιπλέον να λύσεις την εξίσωση $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$

2997. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$$[a, b], f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f''(c) = 0$$

2998. Αν συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με

- $f(a) = b, f(b) = a \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = c$,
- επιπλέον ν.δ.ο. υπάρχουν $m, n \in (a, b) : f'(m)f'(n) = 1$

2999. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, $f(0) = 0, f(1) = 1 \Rightarrow \exists a \in (0, 1) : f(a) = \frac{1}{2}$, επιπλέον

$$\text{ν.δ.ο. υπάρχουν } b, c \in (0, 1) : \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(c)} = 2$$

3000. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη: $|f'(x)| \leq 2, f(1) = 5 \Rightarrow 3 \leq f(2) \leq 7$

3001. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη στο

$$[0, +\infty), f' \downarrow \Rightarrow f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1), \forall x \geq 1$$

3002. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$$[a, b], f(a) < 0, f(b) = f'(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f''(c) < 0$$

3003. Να βρεις το a ώστε να είναι πάντα γνησίως αύξουσα η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2(a+1)x^2 + 3x + 5$

$$\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

3004. Να βρεις σύνολο τιμών $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

3005. Να βρεις σύνολο τιμών $g(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$

3006. Να βρεις πλήθος ριζών της $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

$$4 \text{ ρίζες}$$



3007. Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 2$

- Να βρεις σύνολο τιμών της .
- Να βρεις το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = a, a \in \mathbb{R}$

$(2,3]$, περιπτώσεις

3008. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3}$. Να βρεις

- σύνολο τιμών της
- πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2 + 3x + 3 - ae^x = 0, a \in \mathbb{R}$

3009. Να βρεις το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - a = 0, a \in \mathbb{R}$

3010. Να λύσεις την εξίσωση : $e^{x-1} = 2 - x$

$x=1$

3011. Να λύσεις την εξίσωση : $e^x = 1 + \ln(x+1)$

$x=0$

3012. Να λύσεις την εξίσωση : $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$

$x=0$

3013. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{e^{ax}}, a > 1 \Rightarrow$

- $f \downarrow$.
- Επιπλέον ν.δ.ο. $e^{2a} > \frac{a^2 + 4}{a^2}$

3014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}, x > 2 \Rightarrow \ln(x-1)\ln(x+1) < \ln^2 x$

3015. Ν.δ.ο. $\eta \mu x < 2x, x > 0$

3016. Ν.δ.ο. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, x \geq 0$

3017. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = 0, f^2(x) + f(x) + 1 = x^3 + e^x,$

- να βρεις μονοτονία και
- πρόσημό της .

3018. Αν συνάρτηση είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b], a > 0, f''(x) > 0, g(x) = xf'(x) - f(x)$

- Ν.δ.ο. $g \uparrow$



- Αν επιπλέον $f(a) = f'(a) = 0, h(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow h \uparrow$

3019. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$, ν.δ.ο.

- $\exists c \in (0, x): f'(c) = \frac{f(x)}{x}$.
- Επιπλέον ν.δ.ο. αν η πρώτη παράγωγός της είναι γνησίως αύξουσα το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$

3020. Αν συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0, f''(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) > 0$

3021. Αν $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$, να βρεις

- Μονοτονία
- Πρόσημο
- να λύσεις την εξίσωση: $2 \ln x = \frac{x^2 - 1}{x}$

3022. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + |x - 2|, x \in [0, 3]$,

- να βρεις τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και
- τα κρίσιμα σημεία της.

3023. Δίνεται η $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (1-a)e^x - ax + 5$, να βρεις τις τιμές του a για να έχει κρίσιμα σημεία

3024. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f^3(x) + 3f(x) = e^x - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ ν.δ.ο. έχει ακριβώς ένα

κρίσιμο σημείο

3025. Αν $f(x) = 2x^3 - 3(a-1)x^2 + 6a^2x + 1$, να βρεις το a ώστε να παρουσιάζει ακρότατο στο $x = -1$

3026. Αν $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b \ln x}{\sqrt{x}}$, να βρεις τα a, β ώστε στο $x = 1$ να έχει ακρότατο με τιμή -2

3027. Να βρεις το $a > 0$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^a e^{2a-x}, x > 0$, να γίνεται ελάχιστη

$$a = e^{-2}$$

3028. Να βρεις την ελάχιστη τιμή του $a \in \mathbb{R} : 3x^4 - 4x^3 + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

3029. Να βρεις πλήθος ριζών της εξίσωσης $2x^3 + 3x^2 - 12x - a = 0, a \in \mathbb{R}$

3030. Αν για κάθε $x > 0 : a^x \geq x^a \Rightarrow a =$;

3031. Αν $a^x + b^x \geq 2 \Rightarrow a \cdot b =$;

3032. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(2) + f(3) \leq 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$,



- ν.δ.ο. $f(2) = f(3)$ και
- επιπλέον ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,3)$: η εφαπτομένη της f στο ξ να είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα
- επιπλέον ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (2,3)$: η εφαπτομένη της f' στο c να είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα

3033. Αν συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f^3(x) - 6f^2(x) + 3f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, ν.δ.ο. η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατα

3034. Να βρεις το a ώστε να μην παρουσιάζει ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x + 4a$

3035. Ν.δ.ο. $\frac{1}{x^2} + 2 \ln x \geq 1, x > 0$

3036. Ν.δ.ο. $e^x \geq x^2 + 1, x \geq 0$

3037. Αν $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$, να βρεις

- μονοτονία, ακρότατα
- ν.δ.ο. $\ln x \leq ex - 2$

3038. Αν $f(x) = x^{-v}e^x$, να βρεις

- μονοτονία, ακρότατα
- ν.δ.ο. $e^x \geq \left(\frac{ex}{v}\right)^v, x > 0$

3039. Αν $a > 0, a^x \geq \left(\frac{ax}{v}\right)^v, \forall x > 0 \Rightarrow a = ?$

3040. Αν $f(x) = x \ln^2 x$, να βρεις το σημείο της συνάρτησης με την ελάχιστη κλίση

$$x = \frac{1}{e}$$

3041. Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ να βρεις το πλησιέστερο σημείο της συνάρτησης στο $A(2,0)$

$$x = \frac{3}{2}$$

3042. Οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με μία πλευρά φτιαγμένη από πέτρινο τοίχο, θα περιφραχτεί με σύρμα μήκους 600 μέτρων. Να βρεις τις διαστάσεις του για να έχει μέγιστο εμβαδό

$$x = 150, y = 300$$

3043. Σε ημικύκλιο ακτίνας 10, να εγγράψεις ορθογώνιο το οποίο να έχει το μέγιστο εμβαδό



$$x = 10\sqrt{2}, y = 5\sqrt{2}$$

3044. Κοινωνία μικροβίων έχει πληθυσμό $P(t) = e^{7-2t} - e^{t-5}$ όπου t ο χρόνος σε ώρες

- ν.δ.ο. ο πληθυσμός συνεχώς ελαττώνεται
- να βρεις σε πόσες ώρες θα έχει αφανιστεί
- να βρεις ποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μείωσης του πληθυσμού γίνεται μέγιστος

$$\downarrow, t = 4, t = \frac{12 + \ln 4}{3}$$

Να εξετάσεις κυρτότητα και σημεία καμπής των συναρτήσεων :

3045. $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 3x + 1$

3046. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

3047. $h(x) = \frac{x}{\ln x}$

3048. $k(x) = \frac{x}{e^x}$

3049. $m(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

3050. Ν.δ.ο. οι εφαπτόμενες στα σημεία καμπής είναι κάθετες για την $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$

3051. Αν συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες $f, g: f \uparrow, g \downarrow, f \cup \Rightarrow f \circ g \cup$

3052. Αν η συνάρτηση έχει ακρότατο στο $x = -1$ και σημείο καμπής στο $A(2, -2)$ να βρεις τα α, β, γ όταν

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

3053. Αν $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1, f \cup \Rightarrow a = ;$

$$[-2, 2]$$

3054. Να βρεις το γεωμετρικό τόπο του σημείου καμπής της $f(x) = (x - a)e^x$

$$y = -2e^x$$

3055. Αν η συνάρτηση έχει σημείο καμπής, $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 1 \Rightarrow 3a^2 > 8b$

3056. Αν $f(x) = \ln(e^x + 1)$, να βρεις

- κυρτότητα
- εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 0
- ν.δ.ο. $\ln \frac{e^x + 1}{2} \geq \frac{1}{2}x$





$$U, y = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

3057. Αν συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη, με ακρότατο στο $x=4$, $f' \cap \Rightarrow 2f'(6) + f'(0) < 0$

Να βρεις τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

3058. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

$$y = x - 3$$

3059. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

$$y = x + 2$$

3060. Να βρεις πλάγια ασύμπτωτη για τη συνάρτηση : $2x + 3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}$

$$y = 2x + 3$$

3061. Να βρεις πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{e^x + 1}$

$$y = 2x + 3$$

3062. Αν πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία

$$y = 4x + 3, \text{ στο } +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1)f(x) - 8x^2 + 2x + \eta\mu x}{f(x) + x(f(x)+1) - 4x^2 + 3} =;$$

$$2$$

3063. Αν $f(x) = \frac{(a-1)x^2 + bx + 5}{3x + c}$, $x = -2, y = 3$ είναι ασύμπτωτες, να βρεις τη συνάρτηση

$$a = 1, b = 9, c = 6$$

3064. Αν η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη $f(x) = \frac{a^2x^2 - x - 3}{x - 1} \Rightarrow a = ;$

$$a = \pm 2$$

3065. Δίνονται συναρτήσεις : $f(x) = -x^2 + 3x + a, g(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}$, να βρεις το a όταν η πλάγια

ασύμπτωτη της g στο $+\infty$ εφάπτεται στην f

$$a = -1$$

Να βρεις τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

3066. $f(x) = e^x - x + 1$

$$y = -x + 1$$



3067. $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

$x = 0$

3068. Αν $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$, να βρεις

- μονοτονία
- ακρότατα
- σύνολο τιμών
- πλήθος ριζών
- ασύμπτωτες και
- το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$

Να γίνει μελέτη των συναρτήσεων :

3069. $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

3070. $g(x) = (x^2 + 1)e^x$

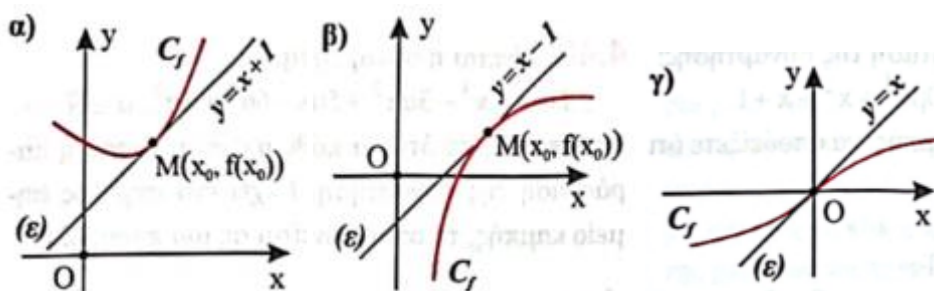
3071. $h(x) = x + \frac{2 - 3x}{x^2}$

3072. Αν $f(x) = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $x \in (0, \pi)$, να βρεις

- μονοτονία
- ακρότατα
- κοίλα
- σημεία καμπής
- ασύμπτωτες
- γραφική παράσταση και

3073. το πλήθος ριζών της εξίσωσης : $1 - a\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0, a \in \mathbb{R}$

3074. Σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα η ευθεία (ϵ) εφάπτεται με την κυρτή ή κοίλη συνάρτηση f . Να γράψετε στην κάθε περίπτωση την ανισότητα που προκύπτει.



3075.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- Να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{e^x + 1}{2} \geq \frac{1}{2}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3076.

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία στρέφεται κοίλα προς τα κάτω. Αν $f(0) = f'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3077.

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(3,5)$.

- Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq 2x - 1$ για κάθε $x \in [1,3]$ Πότε ισχύει η ισότητα;
- Να αποδείξετε ότι: $f(1) + f(3) > 2f(2)$

3078.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$g(x) = f(x)e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Αν $f''(x) \neq 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η g δεν έχει σημεία καμπής.

Αν $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ το μηδέν, να αποδείξετε ότι:

- η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,
- $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3079.

Έστω f ορισμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι:

- Αν η f είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \leq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$
- Αν η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$

3080.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \leq f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$



- Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω συμπερασμάτων;

3081. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Οι f', f είναι κυρτές στο $[\alpha, \beta]$ και το σημείο $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

- Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) + f'(\beta) > 0$.
- Αν ακόμη $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) > 0$

3082. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και:

$$f''(x)f(x) > (f'(x))^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως μονότονη,
- για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ (Θέμα εξετάσεων)

3083. Δίνεται η θετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$.

- Να βρείτε την $g''(x)$.
- Αν η g είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι: $f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Θέμα εξετάσεων)

3084. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) = 3x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .
- Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

3085. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι θετική και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ έχει θετική δεύτερη παράγωγο, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

3086. Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) > 0$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = f \circ g$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

3087. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-f(x)}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

3088. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με:

$$f^2(x) + x = (4-x)f(x) \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ Να αποδείξετε ότι η } f:$$

- δεν έχει κρίσιμα σημεία,
- δεν έχει σημεία καμψής.



3089. Δίνεται κυρτή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο στο (α, β) , $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Αν η f δεν έχει τοπικά ακρότατα στο (α, β) , να αποδείξετε ότι:

- η f είναι αντιστρέψιμη,
- υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\gamma) = 1$,
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,
- η f είναι γνησίως αύξουσα.

3090. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 5$. (Θέμα εξετάσεων)

3091. Έστω f κυρτή ή κοίλη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε δύο σημεία.

3092. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ . Αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ , να αποδείξετε ότι το x_0 δεν μπορεί να είναι συγχρόνως θέση τοπικού ακροτάτου και σημείου καμπής της f .

3093. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι "1-1". Να αποδείξετε ότι:

- αν η f είναι κυρτή, τότε έχει ελάχιστο,
- αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει μέγιστο.

3094. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

- αν $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι φθίνουσα,
- αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα, τότε:
- υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\alpha) > 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3095. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x - x$ με $0 < \alpha < 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να λύσετε την εξίσωση: $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ και να αποδείξετε ότι: $\alpha^x - 1 \geq (\ln \alpha)x, x \in \mathbb{R}$



3096. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου θ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο κι ένα σημείο καμπής.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
 - Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδείξετε ότι τα σημεία: $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - \eta\mu^2\theta$. (Θέμα εξετάσεων)
3097. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$ με $x > -1, \alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, για την οποία ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Να αποδείξετε ότι:
- $\alpha = e$,
 - η f είναι κυρτή,
 - η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, δ) αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε η εξίσωση: $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. (Θέμα εξετάσεων)
3098. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , καθώς και τις $f'(x), f''(x)$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα. Να εξετάσετε αν η f έχει τοπικά ακρότατα και αν η C_f έχει σημεία καμπής.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
 - Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(6) < 2f(4)$.
3099. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.
- Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$ και $f''(x) = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3}$
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να εξετάσετε αν έχει τοπικά ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να εξετάσετε αν έχει σημεία καμπής.
3100. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}$
- Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.
 - Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής, καθώς και τα σημεία καμπής της C_f .
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^2 \ln x + 4x = 1$.
 - Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) > 2f(2)$.
3101. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (\ln x + 2x + 4)\ln x - 6x + 6$



- Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .
- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης: $g(x) = \ln x - x + 1$
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

3102. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x \ln x$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
- Έστω $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι: $(\gamma - \beta)(f(\beta) - f(\alpha)) < (\beta - \alpha)(f(\gamma) - f(\beta))$

Έστω α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι:

- $\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$, όπου $0 < \alpha < \beta < \gamma$,
- αν $\alpha + \gamma = 1$, τότε $\alpha^\alpha \gamma^\gamma \geq \frac{1}{2}$ με $\alpha, \gamma > 0$.

3103. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \frac{100}{x}$, $x \neq 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f , το σύνολο τιμών της και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
- Να αποδείξετε ότι από το σημείο $O(0,0)$ δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

Ένα μεγάλο τυπογραφείο έχει αναλάβει να εκτυπώσει 100 χιλιάδες πανομοιότυπες αφίσες. Για τον σκοπό αυτόν ενοικιάζει μηχανές, που η καθεμία εκτυπώνει 100 αφίσες ανά ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης της κάθε μηχανής ανέρχονται σε 100 €. Επιπλέον το τυπογραφείο για κάθε ώρα εκτύπωσης έχει πρόσθετα έξοδα 10 €.

- Να εκφράσετε τα συνολικά έξοδα εκτύπωσης ως συνάρτηση του αριθμού των εκτυπωτικών μηχανών που θα χρησιμοποιηθούν.
- Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία, ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος, καθώς και το ελάχιστο αυτό κόστος.

3104. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f'(0) = f''(0) = 0$ και:

$f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
- η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- $f(3) < \frac{f(7)+2f(1)}{3}$.

3105. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ Έστω ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(\gamma) > 0$ Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$,
- αν η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$, τότε:
- υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$,



- είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

3106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1} \ln x$. Να αποδείξετε ότι:

- $f'(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}, \quad x > 0$
- $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^3} \left(x + \frac{1}{x} - 2 \ln x - 1 \right), \quad x > 0$
- Αν $g(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \ln x - 1$, να βρείτε το πρόσημο της g .
- Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να αποδείξετε ότι $f(4) > \frac{2f(2)+f(8)}{3}$.

3107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}, \quad x \neq 0$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της όταν $x \in (0, \pi]$.
- Να αποδείξετε ότι $2\eta \mu x < x^2 \eta \mu x + 2x \sigma \upsilon \nu x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{5\pi}{16}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right) < \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής $M(\alpha, \beta)$ της C_f βρίσκονται στην καμπύλη με εξίσωση: $(x^4 + 4)y^2 = 4$

3108. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f'(x))^3 + (f''(x))^2 + f'(x) = e^x + x - 1$$

Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο δέχεται οριζόντια εφαπτομένη,
- η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,
- η f έχει τοπικά ακρότατα,
- $f(e^2) < \frac{f(e^3) + ef(e)}{e+1}$.

3109. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f^3(x) + 3f(x) = e^{3x}$ και $|f'(x)| \leq 3$ για κάθε $x > 0$ Να αποδείξετε ότι:

- $(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,
- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

3110. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) + e^{f(x)} =$

$$1 + x - x^2 - e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

- η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής,
- η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο, που είναι θέση τοπικού ακροτάτου,



- η f είναι κοίλη.

3111. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση με: $f(0) = f'(0) = 0$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x + \theta) - f(x)$ είναι γνησίως μονότονη για κάθε $\theta > 0$.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(|\eta\mu x| + 2) + f(x) = f(x + 2) + f(|\eta\mu x|)$
- Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h^2(x) = f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6} - 1$.

- Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Αν ισχύει $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) \eta \mu \frac{1}{g(x)}}{x}$
- Αν $\alpha \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\beta \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f(\alpha^2) - \alpha^2}{\beta - 2} + \frac{f^2(\alpha) - \alpha^2}{\beta - 1} = 0$

3113. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση με: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $\alpha > 1$ να αποδείξετε ότι:

- $f(2\alpha) > \alpha$
- $f(\alpha^2) > \alpha$
- Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\frac{f(2\alpha) - \alpha}{x_0 - 1} + \frac{f(\alpha^2) - \alpha}{x_0 - 2} = 0$.
- Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{f(x) - x}$.

3114. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Να αποδείξετε ότι:

- η εξίσωση $(x - 2)e^x = -1$ έχει δύο ακριβώς ρίζες $x_1 \in (-2, 1)$ και $x_2 \in (1, 2)$,
- η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

3115. Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, καθώς και η συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$

- Να βρείτε την παράγωγο της g .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \neq 1$ τέτοιο, ώστε: $g'(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - 1}$



- Να βρείτε τη μονοτονία της g .
- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

3116. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση με: $f(2) = 0$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$, $x \neq 2$

- Να βρείτε την παράγωγο της g .
- Να αποδείξετε ότι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2$.
- Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

3117. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση με $f'(0) = 0$.

- Να αποδείξετε ότι $f(2x) - f(x) < xf'(2x)$ για κάθε $x > 0$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} \frac{f(2x)-f(x)}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής και να βρείτε την παράγωγο της g για $x > 0$.
- Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(2\beta)-f(\beta)-\beta f'(2\beta)}{x-2} = \frac{e^\beta-1}{x-1} \text{ έχει μοναδική λύση στο διάστημα } (1,2).$$

3118. Δίνεται η κοίλη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1+2h)}{h} = 0$

- Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
- Αν ισχύει $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, με $x \neq 1$, να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Έστω επιπλέον ότι η g είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$.

- Αν ισχύει ότι $\alpha > 1$, να λύσετε στο $(1, +\infty)$ την εξίσωση: $g(x) = \left(\frac{f'(\alpha)}{\alpha-1} - \frac{f(\alpha)}{(\alpha-1)^2} \right) (x-\alpha) + g(\alpha)$
- Να αποδείξετε ότι: $g(x) - g(\alpha) \leq g'(\alpha)(x-\alpha)$ για κάθε $x > 1$ όπου $\alpha > 1$.

3119. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) ,
- υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$,
- υπάρχει μία τουλάχιστον πιθανή θέση καμπής της γραφικής παράστασης της f . (Θέμα εξετάσεων)

3120. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Έστω ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) \geq f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x-\alpha)$, $x \in [\alpha, \beta]$,



- $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα:
- στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της,
- στο σύνολο $(-\infty, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$, ε) κάθε ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε δύο σημεία.

3121. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κοίλη με $f(0) = 1, f'(0) = 2$.

Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ για $x \in \mathbb{R}$,
- $f(x) - f(\alpha) \geq f'(\beta)(x - \alpha)$ για $x \in [\alpha, \beta]$,
- $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

- Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής.
- Να υπολογίσετε την $g'(x), x \neq 0$.
- Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

Να αποδείξετε ότι:

- κάθε ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε δύο σημεία,
- αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) > 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- αν η f δεν είναι "1-1", τότε έχει μέγιστο.

3122. Έστω συνάρτηση f με την ιδιότητα: $f(x)f'(x)f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$ Να

αποδείξετε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- η f είναι κυρτή ή κοίλη,
- αν $f(0) = 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- αν είναι $f(0) = 1$ και: $(f''(x))^2 f(x) = (f'(x))^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = e^x$.
- αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f'(\alpha) > 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- αν η f δεν είναι 1-1, τότε έχει ελάχιστο.

3123. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - f'(-1) < 1 < f'(1) - f(0) = 1 \text{ Έστω επίσης η}$$

παραγωγίσιμη συνάρτηση: $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(1) = 0$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει:

$$g'(x) = \frac{x+1}{x(e^{g(x)}+1)}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $e^{g(x)} + g(x) = x + \ln x$
- Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.
- Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι: $\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} > \frac{g(\gamma)-g(\beta)}{\gamma-\beta}$ Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $h = g \circ f$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x) = g \circ f$ και να αποδείξετε ότι είναι περιττή.
- Να αποδείξετε ότι $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $h(x) = 2020$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση h είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της C_h .
- Να λύσετε την εξίσωση: $h'(x) + h'(3x) = h'(2x) + h'(5x)$

3124.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\eta\mu x$.

- **B1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- **B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\phi x = 1 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.
- **B3.** Να αποδείξετε ότι $f''(x) + f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$.
- **B4.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

3125.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\ln x}$, $x > 0$.

- **B1.** Να βρείτε την $f'(x)$.
- **B2.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- **B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της C_f .
- **B4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)}\right)$.

3126.

Θέμα Β Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Στη θέση $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο με τιμή 0.

- **B1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 2$.
- **B2.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.
- **B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2$ και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f . Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- **B4.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\epsilon): y = 2 - 3x$ εφάπτεται στη C_f και μάλιστα τη διαπερνά στο σημείο επαφής της.



3127. **Θέμα Γ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + x - 1$ και $\varphi(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$.

- Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Γ2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης φ , καθώς και το σύνολο τιμών της.
- Γ3. Να αποδείξετε ότι $2 \ln x \geq 4 - \frac{3}{x} - x$ για κάθε $x > 0$.
- Γ4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = x \ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

3128. **Θέμα Γ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: - οι f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, - $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, - $f(1) = g(1) + 1$ και $f(0) = g(0)$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) + x, x \in \mathbb{R}$.
- Γ2. Αν η συνάρτηση g έχει δύο ρίζες α, β , με $\alpha < 0 < \beta$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .
- Γ3. Αν η ευθεία $y = 3x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη:
 - της C_g στο $+\infty$,
 - της C_h , όπου $h(x) = (g \circ g)(x), x \in \mathbb{R}$, στο $+\infty$.

3129. **Θέμα Γ** Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = e$, έχει την ιδιότητα:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{(x+1)e^x - f(x)}{x}$$

- Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + e^x - \frac{1}{x}, x > 0$.
- Γ2. Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f .
- Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Γ4. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει μόνο ένα σημείο καμπής.

3130. **Θέμα Γ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ 1 + \ln x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- Γ1. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής.
- Γ2. Να βρείτε την παράγωγο της f και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Γ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

3131. **Θέμα Γ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x + x^2 - 1$.



- Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .
- Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Γ4. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .
- Γ5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^5) = f(x^2) + f(x^{10})$.

3132. **Θέμα Δ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{100}{x}$, $x \neq 0$.

- Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.
- Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f , το σύνολο τιμών της και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
- Δ3. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $O(0,0)$ δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f . Ένα μεγάλο τυπογραφείο έχει αναλάβει να εκτυπώσει 100 χιλιάδες πανομοιότυπες αφίσες. Για τον σκοπό αυτόν ενοικιάζει μηχανές, που η καθεμία εκτυπώνει 100 αφίσες την ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης της κάθε μηχανής ανέρχονται σε 100 €. Επιπλέον το τυπογραφείο για κάθε ώρα εκτύπωσης έχει πρόσθετα έξοδα 10 €.
- Δ4. Να εκφράσετε τα συνολικά έξοδα εκτύπωσης ως συνάρτηση του αριθμού των εκτυπωτικών μηχανών που θα χρησιμοποιηθούν.
- Δ5. Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία, ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος, καθώς και το ελάχιστο αυτό κόστος.

3133. **Θέμα Δ** Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$ και $f'(1) = 2$ Η ευθεία $(\epsilon): y = 2x + 2$ εφάπτεται με τη γραφική παράσταση C_f της f .

- Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 4$.
- Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.
- Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 2) - f(x^2) \leq f(x + 4) - f(x + 2)$.
- Δ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [0, +\infty)$ και $g(x) = f(x)$, $x \in \Delta$.
 - Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .
 - Αν η g^{-1} είναι συνεχής στο $g(\Delta)$, να υπολογίσετε το όριο $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x)$.
 - Αν η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(3, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Δ6. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, \alpha)$ και $(\alpha, +\infty)$,
- $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} < \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$, γ) $f(x) + f(5x) \geq 2f(3x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



3134.

Θέμα Δ Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3^x$ και $g(x) = -x^2 + 9x - 5$.

- **Δ1.** Να βρεθούν οι εφαπτομένες της C_g που διέρχονται από το σημείο $A(1,4)$.
- **Δ2.** Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2 - 5x + 6) = g(x) - 4x$.
- **Δ3.** Να υπολογιστούν τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x) - 2^x}{f(x+1) + f(x) + 2^x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+1) - f(x) - 2^x}{f(x+1) + f(x) + 2^x}$
- **Δ4.** Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

www.kglykos.gr

χαλαρά μόνο
τον Αύγουστο