



Διανύσματα



Κώστας Γλυκός

Κατεύθυνση
κεφάλαιο 1
423 ασκήσεις
και τεχνικές
σε 46 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

13/8/2026

ΕΚΔΟΣΕΙΣ



Τα πάντα για τα
διανύσματα

Αναφορά ως προς σημείο

1. Δίνεται ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. Να βρεις σε καθεμία από τις παρακάτω ισότητες ποια είναι σωστή ή λάθος.

- $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$
- $\vec{AB} = \vec{B\Delta}$
- $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$
- $|\vec{AB}| = |\vec{\Delta\Gamma}|$
- $\vec{AB} = \vec{A\Delta}$
- $|\vec{AB}| = |\vec{B\Gamma}|$

2. Αν A, B, Γ και Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \dots$
- $\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{B\Delta} = \dots$
- $\vec{AB} - \vec{\Delta B} = \dots$
- $\vec{\Gamma B} + \vec{B\Delta} - \vec{A\Delta} = \dots$
- $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \dots$
- $\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} + \vec{B\Delta} = \dots$
- $\vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \dots$
- $\vec{AB} + \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{A\Gamma} = \dots$
- $\vec{AB} - \vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} = \dots$

3. Αν O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$, να συμπληρώσεις τις ισότητες:

- $2\vec{AB} + \vec{B\Delta} = \dots$
- $2\vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma} - 2\vec{AB} = \dots$



- $\frac{1}{2}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \dots$
- $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BF} + \vec{DF} = \dots$
- $\vec{AG} + \vec{AO} - \vec{GO} = \dots$

4. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

- $\left| \vec{AM} + \vec{MB} \right| > \left| \vec{AN} + \vec{NB} \right|$
- $\left| \vec{AM} + \vec{MB} \right| = \left| \vec{AN} + \vec{NB} \right|$
- $\left| \vec{AM} + \vec{MB} \right| < \left| \vec{AN} + \vec{NB} \right|$

5. Αν ισχύει $2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 5\vec{PG} = \vec{0}$, ν.δ.ο. τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά

6. Δίνονται τα σημεία A,B,Γ,Ο, $\vec{OG} = (1-\lambda)\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$, ν.δ.ο. A,B,Γ είναι συνευθειακά

7. Αν

$$2\vec{AL} + 3\vec{BL} + 2\vec{MB} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK} \Rightarrow \vec{KL} \updownarrow \vec{ML}$$

8. Ν.δ.ο. τα A,B,Γ είναι συνευθειακά όταν : $(\kappa+2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa+5)\vec{PG}$

9. Αν ισχύει $2\vec{AL} + 3\vec{BL} + \vec{KB} = \vec{AK} + \vec{AM} + 2\vec{BM} \Rightarrow \vec{KL} \updownarrow \vec{ML}$

10. Αν A,B,Γ,Ο ώστε $3\vec{OA} + 2\vec{OB} - 5\vec{OG} = \vec{0}$ τότε τα A,B,Γ είναι ομοευθειακά

11. Αν $\vec{KB} + \vec{ML} - 3\vec{LA} - \vec{AB} - 2\vec{AM} = \vec{0}$ ν.δ.ο. K,Λ,M συνευθειακά

12. Αν $\vec{OA} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{OB} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{OG} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$ ν.δ.ο. A,B,Γ συνευθειακά

13. Αν $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$ ν.δ.ο. K,Λ,M είναι συνευθειακά

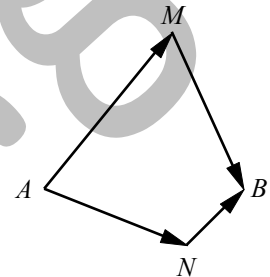
14. Αν $2\vec{AM} + 5\vec{BM} - \vec{BK} = 2\vec{AK} + 4\vec{BL}$ ν.δ.ο. K,Λ,M συνευθειακά

15. Δίνεται ορθογώνιο ABΓΔ. Να σημειώσετε:

- δύο ζεύγη ίσων διανυσμάτων.
- δύο κάθετα διανύσματα.
- δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, με ίσα μέτρα.
- δύο ζεύγη αντίθετων διανυσμάτων.

16. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ με $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$, τέτοιοι, ώστε

$\kappa + \lambda + \mu = 0$ και $\kappa \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{OG} = \vec{0}$, να αποδείξεις ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και αντιστρόφως





17. Αν για το σημείο M του επιπέδου ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AG}$ και $\vec{BM} = \lambda \vec{AG} + \mu \vec{BA}$, να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$.
18. Έστω O και A δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\vec{OA}|=3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία M του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 7$;
19. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\vec{A\Delta} = x \cdot \vec{AB} + y \cdot \vec{AG}$, με $x + y = 1$. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι σημείο της ευθείας $B\Gamma$.
20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M τέτοιο, ώστε να ισχύει $\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AG}$ και $\vec{BM} = \lambda \cdot \vec{AG} + \mu \cdot \vec{BA}$. Να αποδείξεις ότι $\lambda = \mu = 1/2$.
21. Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, E ισχύει ότι $3\vec{EB} + 5\vec{AB} + 7\vec{EA} + 2\vec{A\Delta} - 10\vec{E\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξεις ότι τα σημεία B, Γ, Δ είναι συνευθειακά.
22. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και τα σημεία A, B, Γ, O . Αν $\vec{OA} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{OB} = 5\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma} = 11\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, τότε να αποδείξεις ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά και ότι $B\Gamma = 2AB$.
23. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z ώστε: $3\vec{A\Delta} = \vec{AB}$, $2\vec{E\Gamma} = \vec{B\Gamma}$, $5\vec{AZ} = 3\vec{AG}$. Να αποδείξεις ότι τα Δ, E, Z είναι συνευθειακά.



Χρήση μέσου σε διανύσματα

24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσος ν.δ.ο. $\frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2} = \vec{AM}$
25. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x - 17 = 0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε το μέσον του τμήματος AB να έχει τετμημένη ίση με 4.
26. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών $AB, A\Gamma, B\Gamma$ και Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου του τριγώνου ν.δ.ο. $\vec{\Sigma K} + \vec{\Sigma \Lambda} + \vec{\Sigma M} = \vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma B} + \vec{\Sigma \Gamma}$
27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z ώστε : $\vec{A\Delta} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, $\vec{AZ} = \frac{4}{5}\vec{A\Gamma}$, $\vec{\Gamma E} = \vec{B\Gamma}$. Να εκφράσεις τα διανύσματα των $\Delta E, \Delta Z$ συναρτήσει των διανυσμάτων $AB, A\Gamma$. Να εξετάσεις αν τα Δ, E, Z είναι συνευθειακά.
28. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα σημεία A, B του οριζόντιου άξονα έχουν για τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 2022 = 0$. Να βρεις το λ ώστε το μέσο του AB να έχει τετμημένη 7
- 2,3
29. Αν τμήματα $AB, \Gamma\Delta$ και K, Λ αντίστοιχα τα μέσα τους, ν.δ.ο. $2\vec{K\Lambda} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} = \vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma}$
30. Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και κέντρο O , ν.δ.ο. $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma} + \vec{P\Delta} = 4\vec{PO}$
31. Αν $AB\Gamma\Delta$ τετράπλευρο με K, Λ τα μέσα των διαγώνιων $A\Gamma, B\Delta$ ν.δ.ο. $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} = 4\vec{K\Lambda}$
32. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM και σημεία Δ, P, E ώστε $\vec{A\Delta} = \frac{3}{4}\vec{AB}$, $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AM}$, $\vec{AE} = \frac{3}{8}\vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{AP} // \vec{DE}$
- $\vec{AB} = \lambda \vec{B\Gamma}$: $\vec{AB} // \vec{B\Gamma}$, A, B, Γ συνευθειακά, αν $\lambda > 0$ ομόρροπα, αν $\lambda < 0$ αντίρροπα
33. Να εξετάσεις αν είναι συνευθειακά τα σημεία : $K(a+b, a-b), M(a, -b), N(a+2b, 2a-b)$
34. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, ώστε να ισχύει:
- $|\vec{MA}| = |\vec{B\Gamma}|$
 - $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$
 - $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + \vec{M\Gamma}|$
35. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά και ισχύει ότι $\kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$, τότε να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.
36. Να βρείτε μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ έτσι ώστε να ισχύει: $\kappa \vec{\alpha} + \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) + \mu(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{0}$ για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.



Πράξεις Διανυσμάτων

Αν $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ τότε το διάνυσμα $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

37. Έστω σημείο $A(-1, 2)$. Να βρεις:

- το διάνυσμα $\vec{AB}$ όταν $B(-3, 0)$.
- το σημείο Γ όταν $\vec{A\Gamma} = (-3, -5)$.
- το σημείο Δ όταν $2\vec{A\Delta} = 3\vec{AE}$ και $E(3, -1)$.

38. Αν $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$, να βρεις

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- $2\vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

39. Δίνεται $AB\Gamma$ με $A(1, 6), B(-1, 2), C(5, -4)$, να βρεις :

- K, Λ, M μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma A$
- $\vec{AL}, \vec{BM}, \vec{CK}$
- τα μέτρα των παραπάνω δτων

Ν.δ.ο. A, B, Γ συνευθειακά : αν έχω σχέση τότε κάνε αναφορά ως προς ένα σημείο από τα A, B, Γ αλλιώς δημιούργησε μία ισότητα διανυσμάτων με ένα κοινό γράμμα, π.χ. $\vec{AB} = 3\vec{B\Gamma}$.

$(0, 4), (2, -1), (3, 1), (1, -7), (4, -1), (-5, 8), \sqrt{50}, \sqrt{17}, \sqrt{89}$

Ν.δ.ο. A, B, Γ είναι συνευθειακά : Φτιάξε τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma} : \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 0$

40. Δίνεται το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A(1, 3), B(7, 4), C(8, 6), D(2, 5)$, να υπολογίσεις

- $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{AD}$
- Σχολιάσεις τα προηγούμενα αποτελέσματα
- $\vec{AB} + \vec{BC}, \vec{CD} + \vec{DA}, \vec{DC} + \vec{AD}$

41. Αν $\vec{a} = (1, 2), \vec{\beta} = (3, -7), \vec{\gamma} = (-2, 5)$, να υπολογίσεις :

- $\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
- $\vec{a} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$
- $2\vec{a} - \vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$
- $3\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ εξισώνω αντίστοιχες συντεταγμένες των διανυσμάτων.

$(-4, 24), (26, -59)$

42. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3), \vec{\beta} = (2, -1)$, να βρεις το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ όταν

- $\vec{\gamma} = \vec{a} + \vec{\beta}$
- $\vec{\gamma} + \vec{a} = \vec{\beta}$



• $\vec{a} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = 0$

$(1, 2), (3, -4), \left(1, \frac{1}{3}\right)$

43. Να εξετάσεις αν είναι συνευθειακά τα σημεία $A(-6, 1), B(-2, 3), C(-10, -1)$

44. Να βρει το P ώστε $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ με $A(3, 2), B(-1, 4)$

$\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

45. Να βρεις τα K, Λ ώστε να τριχοτομείται το $\overrightarrow{AB}$, $A(3, -1), B(9, 5)$

$(5, 1), (7, 3)$

46. Αν $\vec{\alpha} = (-2, 5), \vec{\beta} = (3, 4), \vec{\gamma} = (-1, 2)$ τότε να βρείτε:

- τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = -\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma}$
- τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{u}, \vec{v}$

47. Δίνονται τα σημεία A (2, 9), B (3, 4), Γ (5, 7) και το διάνυσμα $\vec{x} = (κ - 2, λ - 5)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
- Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ για τις οποίες ισχύει: $\vec{x} = \overrightarrow{B\Gamma} - 2\overrightarrow{AB}$.
- Να υπολογίσετε το μέτρο του $\overrightarrow{B\Gamma} - 2\overrightarrow{AB}$.

48. Αν $\overrightarrow{AB} = (4, -5), A(1, -2) \Rightarrow B = ?$

$(5, -7)$

49. Έστω τα σημεία A(1, 3), B(-2, 1), να βρεις το M ώστε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$

$\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

50. Αν $A(-2, 1)$ και $B(1, 4)$ είναι οι δύο κορυφές του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ και $K(2, -3)$ το κέντρο του, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.



Κατηγορίες Διανυσμάτων

$$\vec{a} = (x, y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Μοναδιαίο του } \vec{x} : \vec{i} = (1, 0)$$

$$\text{Μοναδιαίο του } \vec{y} : \vec{j} = (0, 1)$$

$$\vec{a} \text{ μοναδιαίο : } |\vec{a}| = 1$$

51. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 - 4\lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Για ποια τιμή του λ είναι:

- $\vec{a} = \vec{0}$;
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} // \vec{x}$;

52. Δίνονται τα ίσα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2, 2\lambda^2 - 3\lambda - 2) \text{ και } \vec{\beta} = (\lambda^2 - 7\lambda + 10, -3\lambda^2 + 7\lambda - 2). \text{ Να βρείτε το } \lambda \in \mathbf{R}$$

53. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x^2 - 5x + 6, x^2 - 9)$, να βρείτε τις τιμές του x , έτσι ώστε:

- $\vec{\alpha} = \vec{0}$
- $\vec{\alpha} // \vec{x}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

54. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, x)$ να είναι αντίρροπα.

55. Αν $\vec{u} = (-1, 2)$, ποιο διάνυσμα είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$;

56. Να βρεις $x, y : \vec{a} = (2x + 3y - 5, -x + 2y - 1)$, να είναι

- Το μηδενικό δ/μα
- Να είναι το μοναδιαίο του $\vec{x}$

$$(1, 1), \left(\frac{9}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

57. Έστω $\vec{a} = (\lambda - 2, \lambda^2 - 4)$, να βρεις το λ ώστε να είναι

- μηδενικό δ/μα ,
- παράλληλο στον οριζόντιο άξονα και
- παράλληλο στον κατακόρυφο άξονα .

$$2, \pm 2, 2$$

58. Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (9, x)$ να είναι αντίρροπα.

59. Να βρείτε τα x, y , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^3 + y^3, x + y)$ και $\vec{\beta} = (-7, -1)$ να είναι αντίθετα.

60. Αν $AB\Gamma$ με $A(0, 7), B(-2, 1), C(4, 3)$, να βρεις

- το P ώστε $\vec{B\Gamma} = 2\vec{GP}$
- Το Σ του οριζόντιου άξονα ώστε $\vec{\Gamma\Sigma} // \vec{AB}$



$$(7,4), (3,0)$$

61. Αν $\vec{a} = (2x + 3y - 5, -x + 2y - 1)$, να βρεις x, y ώστε :

- $\vec{a} = \vec{0}$
- μοναδιαίο του xx' ,
- μοναδιαίο του yy' ,
- $//xx'$,
- $//yy'$,
- $//\vec{\beta} = (3,2)$
- $\perp \vec{\gamma} = (2,2)$

Ν.δ.ο. τα A,B,Γ δημιουργούν τρίγωνο : αρκεί τα A,B,Γ να μην είναι συνευθειακά .

$$\left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right), \left(\frac{9}{7}, \frac{8}{7}\right), \left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right), 2y = x + 1, 3y = 5 - 2x, y = 1, x + 5y - 2 = 0$$

62. Να εξετάσεις αν είναι συνευθειακά τα σημεία : $A(-1, -5), B(2, 1), C(1, 5)$



63. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -2), \vec{\beta} = (3, 4), \vec{\gamma} = (5, 20)$

- Ν.δ.ο. ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά .
- Να αναλύσεις το γ σε δύο συνιστώσες στη διεύθυνση των α, β

$$k = -4, m = 3$$

64. Έστω τα σημεία $A(-1, 2), B(2, 3), \Gamma(5, 0)$. Να βρεις το Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις $AB, \Gamma\Delta$.

65. Έστω τα σημεία $A(2, -1), B(3, 4)$. Να βρεις το M ώστε $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$

$$(0, -11)$$

66. Αν $A(1, 2), B(-4, -1)$ να βρεις τα σημεία Γ, Δ ώστε να χωρίζουν το AB σε τρία ίσα τμήματα (τριχοτόμηση).

$$C\left(-\frac{2}{3}, 1\right), D\left(\frac{7}{3}, 0\right)$$



Μέτρο Διανυσμάτων

67. Αν $\vec{a} = (2, 3), \vec{\beta} = (-1, 1), \vec{\gamma} = (-2, 3) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}| = ; , |\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{a}| = ;$

$\sqrt{26}, 11 + \sqrt{17}$

68. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{a} = (-2, 3), \vec{\beta} = (1, -1), \vec{\gamma} = (3, -2)$, να υπολογίσεις :

- $\vec{a} + 2\vec{\beta}$
- $2\vec{a} - \vec{\gamma}$
- $\vec{a} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$
- $2\vec{a} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$
- $|\vec{a} + 2\vec{\beta}|$
- $|2\vec{a} - \vec{\gamma}|$
- $|\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$

$(0, 1), (-7, 8), (3, 0), (-4, 7), 1, \sqrt{113}, 2$

69. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\alpha} = (-6, 8)$ με μέτρο τριπλάσιο από το $|\vec{\alpha}|$

70. Να βρείτε τα α, β , ώστε να ισχύει: $(\alpha - 3)\vec{i} - \beta\vec{j} \parallel \gamma'\gamma$ και $(\alpha + 1)\vec{i} + \beta\vec{j} \parallel \vec{i} + \vec{j}$

71. Να αποδείξεις ότι:

- $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}|\vec{u} + \vec{v}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{u} - \vec{v}|^2$

72. Αν $|\vec{AB}| = 5, B(2, 1), A(x, 5) \Rightarrow x = ;$

$5, -1$



Γραμμικός συνδυασμός

Το $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}, \vec{\beta}$ τότε $\vec{\gamma} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$, όπου k, λ πραγματικοί αριθμοί.

73. Να γραφεί το $\vec{\gamma} = (12, -4)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a} = (3, 1), \vec{\beta} = (-2, 2)$

$k = 2, m = -3$

74. Να γραφεί το $\vec{\gamma} = (8, 17)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a} = (-2, 1), \vec{\beta} = (4, 5)$

$k = 2, m = 3$

75. Να γραφεί το $\vec{\gamma} = (2a, a + 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a} = (a, 1), \vec{\beta} = (1, a)$

76. Να γράψεις το $\vec{a} = (2, 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}, \vec{j}$

$k = 2, m = 1$

77. Να γραφεί το $\vec{\gamma} = (8, 17)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a} = (-2, 1), \vec{\beta} = (4, 5)$

Παράλληλα και κάθετα διανύσματα



$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ (ομόρροπα) τότε πρέπει $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ και τα αντίστοιχα πρόσημα των δ/των ίδια .

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
 $\vec{a} // xx' \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{i}) = 0$
 $\vec{a} // yy' \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{j}) = 0$

78. Αν $\vec{a} = (8, x), \vec{b} = (x, 2)$ να βρεις το x ώστε να είναι

- παράλληλα ,
- ομόρροπα ,
- αντίρροπα
- κάθετα

$\pm 4, 4, -4, 0$

$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ (αντίρροπα) τότε πρέπει $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ και τα αντίστοιχα πρόσημα των δ/των να είναι αντίθετα .

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

τυχαίο σημείο $M(x, y)$

τυχαίο του xx' : $M(x, 0)$

τυχαίο του yy' : $M(0, y)$

79. Να βρεις τη σχέση των x, y : $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (x - y, x + 2y + 1), \vec{c} = (y - 2x, x - 1), \vec{a} // \vec{b} + \vec{c}$

$y = -2x$

80. Να βρεις το k : $\vec{a} = (k + 2, 3k + 6), \vec{b} = (-1, k + 2), \vec{a} // \vec{b}$

-5

81. Ν.δ.ο. αν το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι κάθετα τότε τα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα

82. Να βρεις το διάνυσμα με μέτρο 2 που είναι κάθετο στο $\vec{a} = (-3, 4)$

$\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right), \left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

83. Να αποδείξετε ότι για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{b}^2 \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$ είναι κάθετο στο $\vec{b}$.

84.

85. Να βρεις το k : $\vec{a} = (k, 1 - k), \vec{b} = (2k, k + 1), \vec{c} = (1, 2)$

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{a} // \vec{c}$

$1, \frac{1}{3}$

86. Έστω $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (3, 4), \vec{c} = \left(\frac{5}{2}, 10\right)$

- Ν.δ.ο. δεν είναι συγγραμμικά ανά δύο
- Να γράψεις το $\vec{c}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{b}$

$1, \frac{1}{2}$

87. Δίνονται τα σημεία $A(3, -2), B(6, -4), \Gamma(1, 5)$ και $\Delta(-1, 2)$. Να υπολογίσεις



- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{GA}$
- Τι συμπεραίνεις για τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{GA}$

88. Να βρεις το διάνυσμα με μέτρο 2 που είναι ομόρροπο στο $\vec{a} = (4, -3)$

$$\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right), \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

89. Να βρεις το διάνυσμα με μέτρο 5 που είναι κάθετο στο $\vec{a} = (-6, 8)$

$$(3, -4), (-3, 4)$$

90. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -4)$ και $\vec{b} = (-8, 5)$. Να αναλύσετε το $\vec{b}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.

91. Να αναλύσεις το $\vec{a} = (3, -5)$ σε δύο συνιστώσες όπου η μία $\parallel \vec{b} = (-2, 1)$ και η άλλη $\perp \vec{\gamma} = (3, -1)$

92. Ποιο διάνυσμα είναι παράλληλο με το $\vec{a} = (-72, 84)$ και έχει το μισό του μέτρο.

93. Να αναλύσεις το διάνυσμα $\vec{a} = (10, 21)$ σε δύο συνιστώσες όπου η μία $\parallel \vec{b} = (-4, 6)$ και η άλλη $\parallel \vec{\gamma} = (6, 3)$

94. Να αναλύσεις το διάνυσμα $\vec{b} = (3, 5)$ σε δύο συνιστώσες όπου η μία $\parallel \vec{a} = (1, 2)$ και η άλλη να είναι κάθετη στο $\vec{a}$

95. Να αναλύσεις το $\vec{b} = (4, 7)$, σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι $\parallel \vec{a} = (-1, 2)$

96. Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (k-3, 4k-1)$, $\vec{b} = (-3k+9, k-3)$, να είναι κάθετα.

$$3, -8$$

97. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (4, 3)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 3$, $\vec{\gamma} \parallel \vec{b}$.

$$\left(6, \frac{9}{2}\right)$$

98. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(7, -4)$. Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε $\angle AMB = 90^\circ$.

99. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$. Να αναλύσετε το $\vec{b}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του $\vec{a}$.

100. Να βρείτε τη γωνία ϕ , την οποία σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{AB}$ με τον $x'x$, όταν $A(2, 4)$ και $B(4, 2)$.

101. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$, για το οποίο ισχύει ότι: $\vec{a} = (|\vec{a}| - 4, 8)$.

102. Αν $\vec{a} = (3, 2)$ και $\vec{b} = (-1, 5)$ τότε να υπολογίσετε:



- $3\vec{\alpha}$
- ii. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- iii. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- iv. $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

103. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$. Να βρείτε τα ακόλουθα διανύσματα:

- α) $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- β) $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - \vec{v}$

104. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν: $2(\vec{\alpha} - \vec{x}) - 3\vec{\beta} = \vec{x} - \vec{\alpha}$

105. Να βρεθεί το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB αν A(-1,7) και B(3,5).

106. Στο ευθύγραμμο τμήμα AB το M είναι μέσο. Αν A(2,5) και M(-1,7) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.

107. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, με A(4,-2), B(-3,8) και Γ(-5,-6). Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{GA}$.

108. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων:

- $\vec{\alpha} = (3, -4)$
- ii. $\vec{\beta} = (-8,6)$

109. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A και B σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- A(-2,7) και B(4,-1)
- ii. A(3,-5) και B(3,2)

110. Αν $\vec{\alpha} = (-\sqrt{3}, 1)$ και $\vec{\beta} = (-3, \sqrt{3})$, να εξετάσετε αν είναι παράλληλα.

111. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης για τα ακόλουθα διανύσματα:

- $\vec{\alpha} = (-4,8)$
- ii. $\vec{\beta} = (-8,0)$
- iii. $\vec{\gamma} = (0,10)$ i
- v. $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 12\vec{j}$
- v. $\vec{\beta} = -2\vec{i}$
- vi. $\vec{\delta} = 12\vec{i} + 3\vec{j}$

112. Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν τα ακόλουθα διανύσματα με τον άξονα x'x:



- $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3})$
- ii. $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 1)$
- iii. $\vec{\gamma} = (-\sqrt{2}, \sqrt{6})$
- iv. $\vec{\delta} = (\sqrt{2}, -\sqrt{6})$

113. Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα x' όταν:

- A(3,0), B(0,-1)
- ii. A(1,5), B(-2,5)
- iii. A(3,-2), B(3,2)
- iv. A(2,1), B(1,1)

114. Να βρεθούν οι τιμές του λ, μ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -2\mu)$ και $\vec{\beta} = (\mu - 1, \lambda - 8)$ να είναι ίσα.

115. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda^2 - \lambda + 3, \lambda^2 - 1)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2 + 2\lambda + 1, \lambda + 1)$ να είναι ίσα.

116. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^2 + y^2, x)$ και $\vec{\beta} = (2xy + 4, 6 - y)$. Να βρείτε τα x, y ώστε τα διανύσματα να είναι ίσα.

117. Αν $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda^2 + 2\lambda)$ να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

- $\vec{\alpha} = \vec{0}$
- ii. $\vec{\alpha} \parallel x'x$
- iii. $\vec{\alpha} \parallel y'y$

118. Αν $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$ να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

- $\vec{\alpha} = \vec{0}$
- ii. $\vec{\alpha} \parallel x'x$
- iii. $\vec{\alpha} \parallel y'y$

119. Αν $\vec{\alpha} = (\lambda^2 + 3\lambda, \lambda^2 - 9)$ να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

- $\vec{\alpha} = \vec{0}$
- ii. $\vec{\alpha} \parallel x'x$
- iii. $\vec{\alpha} \parallel y'y$
- iv. αν $\vec{\beta} = (\lambda - 5, 3\lambda - 1)$, τότε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

120. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (8, 17)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων: $\vec{\beta} = (-2, 1)$ και $\vec{\gamma} = (4, 5)$.



121. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v} = (6,5)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων: $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-3)$.
122. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-3)$ και $\vec{\beta} = (-1,2)$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = (3,2)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$
123. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (y-2)\vec{i} + (x+6)\vec{j}$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,-6)$.
- Να βρείτε τις τιμές των x, y
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
124. Δίνονται τα σημεία: $A(x,y)$, $B(x+2y,x+1)$ και $\Gamma(y-3,2x-4)$ με $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = (-12,10)$.
- Να βρείτε τις τιμές των x, y
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = (-4,14)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}$
125. Δίνονται τα σημεία $A(x,2y-4)$, $B(-2x-y,3x-y)$ και $M(y,x-1)$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε το M να είναι μέσο του AB .
126. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $A(2,5)$ ως προς το $M(3,1)$.
127. Οι τετμημένες δυο σημείων A και B είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x - 19 = 0$. Να βρεθούν τα λ ώστε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB να έχει τετμημένη 3.
128. Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A(1,2)$ και $B(-1,0)$ και $K(0,3)$ το κέντρο του, να βρείτε τα Γ, Δ .
129. Το σημείο $A(4,2)$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(3,5)$. Να βρεθεί το αντιδιαμετρικό σημείο του A .
130. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν τα σημεία $K(2,-2)$, $\Lambda(4,-4)$ και $M(-1,-3)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$, και ΓA αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ .
131. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(-3,5)$, $B(2,7)$ και $\overrightarrow{AG} = (7,-6)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες
- Του σημείου Γ
 - των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}$.
132. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (5,4)$ και το σημείο $A(3,-2)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου B .
133. Αν είναι $A(-2,1)$, $B(3,-2)$ και ισχύει: $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του M .



134. Αν $A(1,-3)$ και $B(-2,1)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{OA} - 3\vec{OB}$
135. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(0,5)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε να ισχύει: $\vec{MA} = \frac{2}{3}\vec{MB}$.
136. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(4,1)$, $\Gamma(2,4)$. Να βρεθεί σημείο Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα A, B, Γ, Δ να είναι παραλληλόγραμμο.
137. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(6,8)$, $\Gamma(-2,2)$. Να βρεθεί σημείο Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα A, B, Γ, Δ να είναι παραλληλόγραμμο.
138. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(2,5)$, $B(4,-8)$ και $\Gamma(-4,3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:
- Του κέντρου K του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$,
 - Της κορυφής Δ .
139. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $A(-1,3)$, $B(6,4)$ και $\Gamma(5,-1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:
- του κέντρου K του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
 - της κορυφής Δ
140. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $A(1,5)$ και $B(7,3)$. Επίσης για το σημείο τομής M των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ ισχύει ότι: $\vec{AM} = (1, -4)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:
- Του σημείου M
 - Των κορυφών Γ και Δ .
141. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $B(3,5)$, $\Gamma(5,-1)$ και $\Delta(-1,-1)$. Να βρείτε:
- Τις συντεταγμένες της κορυφής A
 - Το μέτρο του διανύσματος $\vec{A\Gamma}$
 - Το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{A\Gamma} - \frac{7}{2}\vec{A\Delta}$
142. Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μοναδιαίο.
143. Αν $\vec{a} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,-2)$, να υπολογιστούν τα:
- $|-2\vec{a}|$
 - ii. $|3\vec{a} - 2\vec{\beta}|$
144. Δίνονται τα σημεία $A(x,-2)$, $B(16,x+2)$ και $\Gamma(5,x)$, με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:
- $$|2\vec{AB} + 3\vec{B\Gamma}| = |\vec{A\Gamma}|$$



145. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(-1, \lambda+3)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι 5.
146. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{b} = (x, 2x + 15)$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- Το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$
 - Τον αριθμό x , ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{a} + \vec{b}$ να έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{5}$.
147. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος: $\vec{a} = (|\vec{a}| - 4, 8)$.
148. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος: $\vec{a} = \left(-3, \frac{|\vec{a}|+3}{2}\right)$.
149. Αν $\vec{a}$ δεν είναι παράλληλο στον $x'x$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος: $\vec{a} = (4, -2) - |\vec{a}|(1, -1)$.
150. Αν $\vec{a} = (\lambda, \lambda + 1)$, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $|-3\vec{a}| = 15$.
151. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM διάμεσος του. Αν $A(-1, 3)$, $B(-2, -3)$ και $\Gamma(2, 4)$, να βρείτε:
- τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$
 - ii. το $|\overrightarrow{AM}|$
152. Να βρεθεί ένα σημείο M του άξονα $x'x$ το οποίο ισαπέχει από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, -4)$.
153. Δίνονται τα σημεία $B(1, 2)$ και $\Gamma(-1, 6)$. Να βρείτε το σημείο A του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $(AB) = (A\Gamma)$.
154. Δίνονται τα σημεία $A(3, 8)$ και $B(9, 4)$. Να βρείτε το σημείο Γ του άξονα $x'x$, το οποίο ισαπέχει από τα A, B .
155. Δίνονται το σημείο $A(3, -1)$. Να βρείτε το σημείο B του άξονα $y'y$, το οποίο απέχει από το A απόσταση 5.
156. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 5)$ και $B(-10, -3)$. Να βρείτε:
- σημείο του άξονα $x'x$ που να ισαπέχει από τα A, B .
 - σημείο της ευθείας $(\epsilon): y = -1$ που να ισαπέχει από τα A, B .
157. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 0)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(0, -1)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
158. Δίνονται τα σημεία $B(1, 2)$ και $\Gamma(-1, 6)$, να βρείτε σημείο του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με κορυφή A .



159. Δίνονται τα σημεία $A(2,2)$, $B(0,-1)$, $\Gamma(-5,-2)$ και $\Delta(1,7)$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
160. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι παράλληλα:
- $\vec{\alpha} = (0,2)$ και $\vec{\beta} = (-3,4)$
 - ii. $\vec{\alpha} = (-6,8)$ και $\vec{\beta} = (9,-12)$
161. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε τα σημεία $A(-3,1)$, $B(\lambda,3)$ και $\Gamma(-5,1-\lambda)$ να είναι κορυφές τριγώνου. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x,3)$ και $\vec{\beta} = (4,x)$ είναι παράλληλα.
162. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,-6)$, $\vec{\beta} = (-4,8)$ και $\vec{\gamma} = (-2,1)$.
- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.
 - Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ δεν είναι παράλληλα.
 - Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (\lambda, \lambda - 6)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 4\vec{\gamma}$.
163. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x,-1)$ και $\vec{\beta} = (-9,x)$ είναι αντίρροπα.
164. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$, $\vec{\beta} = (-2,5)$ και $\vec{\gamma} = (0,-1)$.
- Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.
 - Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε 2 συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (δηλ. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$)
165. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(2,9)$ είναι συνευθειακά.
166. Δίνονται τα σημεία $A(1,-2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(\mu,4\mu-3)$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.
167. Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(-5,-3)$, $\Gamma(-4,7)$ και $\Delta(-2,3)$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται. (δηλ. ότι τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ δεν είναι παράλληλα)
168. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα σημεία $A(1,x+3)$, $B(x,8)$ και $\Gamma(-4,-10)$ είναι συνευθειακά.
169. Αν $\vec{\alpha} = (3,-2)$ να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο είναι αντίρροπο προς το $\vec{\alpha}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από αυτό.
170. Αν $\vec{\alpha} = (-5,8)$ να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο είναι ομόρροπο προς το $\vec{\alpha}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από αυτό.



171. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{a} = (-3, 4)$.
172. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (-6, 8)$. Να βρεθεί:
- το μέτρο του $\vec{a}$
 - ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{a}$ με μέτρο τριπλάσιο από το $\vec{a}$.
173. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda - 2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, 4 - 2\lambda)$.
- Να βρείτε το λ ώστε $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$.
 - Για $\lambda=5$ να βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ που να είναι ομόρροπο του $\vec{a}$ και να έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{\beta}$.
174. Δίνονται τα σημεία $A(0, 1)$, $B(-2, 0)$ και $\Gamma(1, 3)$.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
 - Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
175. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda-1, -2)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(\lambda-3, 2\lambda)$.
- Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
 - Για $\lambda=-1$, να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM.
176. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(-1, 2)$, $B(7, 0)$ και $\Gamma(1, 4)$. Αν Δ είναι το μέσον της διαμέσου AM και για το σημείο E ισχύει $2\vec{AE} = \vec{E\Gamma}$, τότε:
- να βρείτε τα σημεία Δ, E
 - να δείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.
177. Δίνονται τα σημεία $A(\kappa-3, -2)$, $B(7-\kappa, \kappa)$ και $\Gamma(\kappa-6, -11)$, με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$
- Το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι παράλληλο στον άξονα γ'γ.
 - Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
178. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (\kappa^2 + 2\kappa + 5, 3\lambda - \mu^2)$ και $\vec{\beta} = (4\lambda - \lambda^2, 15 + 6\kappa\mu)$, με $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ίσα, να βρείτε:
- Τους αριθμούς κ, λ, μ
 - Το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$
 - Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, που είναι αντίρροπο του $\vec{a}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{a}$.
179. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $3\vec{a} + 2\vec{\beta} = (-2, 9)$ και $\vec{a} - 2\vec{\beta} = (10, -5)$
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (4, 7)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$
 - Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda, 6 - \lambda)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{a} - \vec{\beta}$.



180. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(1,3)$, $B(-5,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2, -8)$. Να βρείτε:

- Τις συντεταγμένες του Γ
- Τις συντεταγμένες των μέσων M και N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα
- Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{MN}$

181. Δίνεται παραλληλόγραμμο με $A(3,4)$, $B(8,5)$ και $\Gamma(7,2)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ
- Να βρείτε σημείο E του $\gamma'\gamma$, ώστε $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BD}$
- Να βρείτε σημείο Z του $\chi'\chi$, ώστε $\overrightarrow{BZ} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$
- Αν M είναι το μέσο του EZ , να αποδείξετε ότι τα σημεία A , Γ , M είναι συνευθειακά.

182. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2,3)$ και $\vec{\beta} = (-3, -2)$. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{a} + 3\vec{\beta}$ καθώς και η γωνία που σχηματίζει με τον $\chi'\chi$.

183. Δίνονται τα σημεία $A(\mu-3,2)$ και $B(3\mu,\mu-3)$. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

184. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\mu, \mu + 2)$, με $\mu \in \mathbb{R}^*$, και $\vec{\beta} = (6,8)$.

- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\beta}$
- Αν το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_a = \frac{3}{2}$, να βρείτε:
- Α. τον αριθμό μ
- Β. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$ με τον άξονα $\chi'\chi$
- Γ. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta} = -7\vec{a} + 5\vec{\beta}$ με τον άξονα $\chi'\chi$

185. Δίνονται τα σημεία $A(\mu-5,2)$ και $B(3\mu,\mu)$. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{4\pi}{3}$.

186. Δίνονται τα σημεία $A(\mu-1,2)$ και $B(2,3\mu)$. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

187. Δίνονται τα σημεία $A(3x,y)$ και $B(4x+3y,2y)$. Να βρείτε το $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 135° και να έχει μέτρο $2\sqrt{2}$.

188. Έστω ότι στο σύστημα αναφοράς $O\chi\gamma$ είναι $A(x-y,3y)$ και $\overrightarrow{OB} = (2x - y, x - y)$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε το $\overrightarrow{OA}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 315° και να είναι $|\overrightarrow{AB}| = 4$.



189. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (3, -2 - |\vec{\beta}|)$ και $\vec{\beta} = (4 - |\vec{a}|, \sqrt{3})$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{a}, \vec{\beta}$.
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x' .
- Αν $\vec{\gamma} = (\mu, 2 - \mu)$, να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\gamma} \parallel \vec{a}$.

190. Τα διανύσματα $\vec{a} = (\kappa, \mu + 4)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \kappa - 9)$ με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^*$, έχουν συντελεστές διεύθυνσης 2 και -3 αντίστοιχα. Να βρείτε:

- Τις τιμές των κ, μ
- Τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta}$

191. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, \lambda - 5)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 6)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$.

- Να βρείτε τον αριθμό λ
- Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 4\vec{a} + 3\vec{\beta}$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x' .
- Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\kappa, \kappa - 6)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$.

Εσωτερικό γινόμενο

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων :

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{\beta})$



192. Αν $|\vec{a}|=1, |\vec{\beta}|=\sqrt{3}, (\vec{a}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \vec{a}\vec{\beta}=;$

$\frac{3}{2}$

193. Αν $|\vec{a}|=2\sqrt{3}, |\vec{\beta}|=\sqrt{12}, (\vec{a}, \vec{\beta})=135 \Rightarrow \vec{a}\vec{\beta}=;$

$-6\sqrt{2}$

194. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta} : |\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{\beta}|=2\sqrt{2}, (\vec{a}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$ να υπολογίσεις

- $\vec{a}\vec{\beta}$
- $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$
- $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$
- $|\vec{a} + \vec{\beta}|$
- $(2\vec{a} + 3\vec{\beta})(4\vec{a} - 5\vec{\beta})$

$2\sqrt{3}, 10, 10 + 4\sqrt{3}, \sqrt{10 + 4\sqrt{3}}, 4\sqrt{3} - 104$

195. Αν $\vec{a}=(1, 2)$, και $\vec{b}=(-1, 3)$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $(-\vec{a}) \cdot (3\vec{b})$
- $\vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$

$5, -15, 10, 5, -5, -35$

196. Αν $\vec{\alpha}=(3, \sqrt{3}), \vec{\beta}=(\sqrt{3}, -1)$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

60

197. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}, |\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$. Να βρείτε το $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

198. Αν $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, τότε να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.

199. Ομοίως αν $\vec{\alpha}=(1, \sqrt{3}), \vec{\beta}=-\sqrt{3}\vec{i} + 3\vec{j}$.

60

200. Αν $(\vec{a}, \vec{\beta})=(\vec{\beta}, \vec{\gamma})=\frac{\pi}{4}, |\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{\beta}|=\sqrt{3}, |\vec{\gamma}|=2 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|=;$

Να υπολογισθούν :

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$|\vec{a} + \vec{\beta}|$: υπολόγισε το

$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{a} + \vec{\beta})^2 = \dots$

Προσοχή : $\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$, $\vec{a}\vec{a}^2 \neq \vec{a}^3$,
 $\vec{a}(\vec{a}\vec{\beta}) \neq \vec{a}^2\vec{\beta}$

Να βρεις τη γωνία των διανυσμάτων

$\vec{a}, \vec{\beta}$: στον τύπο $\vec{a}\vec{\beta} = |\vec{a}||\vec{\beta}|\cos(\vec{a}, \vec{\beta})$

υπολογίζω πρώτα $\vec{a}\vec{\beta}, |\vec{a}|, |\vec{\beta}|$ για να βρω το

$\cos(\vec{a}, \vec{\beta})$



201. Να βρεις το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων : $\vec{a} = (-1, 4), \vec{\beta} = (1, -2)$

$$\frac{-9}{\sqrt{85}}$$

202. Να βρεις τη γωνία των διανυσμάτων : $\vec{a} = (2, 1), \vec{\beta} = (2 + \sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$

$$60$$

203. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με γωνία $\frac{2\pi}{3}$, να βρεις τη γωνία των $(2\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a} - 2\vec{\beta})$

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

204. Αν $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |3\vec{a} - 2\vec{b}| =$

$$\sqrt{17 - 6\sqrt{2}}$$

205. Να βρεις τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (4, 2)$

$$0$$

206. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα

$$5\vec{a} + 2\vec{\beta} \text{ και } \vec{a} - 3\vec{\beta}, \text{ αν } |\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 3 \text{ και } (\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ.$$

207. Αν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}, (\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ \Rightarrow (\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a}) =$

$$90$$

208. Ν.δ.ο. $\frac{\vec{\beta}\vec{a}}{\vec{\beta}^2} \vec{\beta} - \vec{a} \perp \vec{\beta}$

209. Να εξετάσεις αν :

- $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a}\vec{\beta})\vec{a}}{\vec{\beta}^2} \perp \vec{\beta}$
- $(\vec{\beta}\vec{a})\vec{\gamma} - (\vec{a}\vec{\beta})\vec{\gamma} \perp \vec{a}$
- $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a}\vec{\beta})\vec{a}}{\vec{a}^2} \perp \vec{a}$

210. Να εξετάσεις τότε ισχύει η ισότητα : $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

$$\uparrow \uparrow$$

Να βρεις τη γωνία των διανυσμάτων $2\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a} - \vec{\beta}$: δούλεψε τον τύπο :

$$(2\vec{a} + \vec{\beta})(\vec{a} - \vec{\beta}) = |2\vec{a} + \vec{\beta}||\vec{a} - \vec{\beta}|\cos \omega$$

Να υπολογίσεις το $|\vec{a} - \vec{\beta}|$: ύψωσε στο τετράγωνο και κάνε πράξεις. Μην ξεχάσεις να βάλεις ρίζα.

Όταν υπολογίζεις γωνία δτων σε σχήμα θυμήσου να βάλεις τα δτα με την ίδια αρχή.



211. Να αποδείξετε ότι $-1 \leq \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \leq 1$.

212. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

213. Σε ημικύκλιο με διάμετρο AB και κέντρου O παίρνουμε σημείο M .

- Να εκφράσεις τα διανύσματα $\vec{MA}$ και $\vec{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Να βρεις το γινόμενο $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$. Τι συμπεραίνεις για τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{MA}$ και $\vec{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

214. Αν $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{\beta}) \Rightarrow \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$

215. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta} - \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma} - \vec{a} \Rightarrow \vec{\gamma} \perp \vec{a} - \vec{\beta}$

216. Να βρεις το $\vec{\beta} : |\vec{\beta}|=5, \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -6, \vec{a} = (2, -3)$

$(3, 4), \left(-\frac{252}{676}, -\frac{32}{26}\right)$

217. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα, τότε να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

218. Πότε ισχύει η ισότητα : $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$

οξεία

219. Αν $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{\beta}) \perp \vec{a}$

220. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, (3\vec{a} + 4\vec{\beta}) \perp (\vec{a} - \vec{\beta}) \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) =$

0

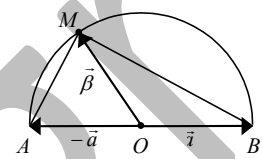
221. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a} - \vec{\beta}) =$

$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

222. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$

223. Αν $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{3\pi}{4}$ να βρεις το μέτρο του $\vec{\gamma} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta}$

$\sqrt{29}$





224. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, 6\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$, να βρεις τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$

45

225. Αν $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}(x-1), 2x)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$, τότε να βρείτε το x , ώστε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

226. Ν.δ.ο. $|\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

227. Πότε ισχύει η ισότητα : $(\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$

↑↑, ↑↓

Να βρεις τη γωνία του διανύσματος $\vec{a}$ με τον άξονα xx' : Υπολόγισε το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_a = \frac{y}{x}$ και αντικατέστησε στον τύπο $\lambda = \tan \omega$, για να βρεις τη γωνία ω .

228. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3, a+2)$, $M(a^2-2, 3)$, $\angle A = 90^\circ \Rightarrow a =$;

1, -2

229. Δίνονται κορυφές τριγώνου $A(2,1)$, $B(-3,4)$, $C(4,2) \Rightarrow \angle A =$;

230. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (-7\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}) \Rightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$;

60

231. Να βρεις τη γωνία του $\vec{\alpha} = (-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ με τον άξονα xx'

120

232. Αν $A(-2,1)$, $B(-1, 1+\sqrt{3}) \Rightarrow (\vec{BA}, xx') =$;

240

233. Δίνονται τα σημεία $A(a-5, 2)$, $B(3a, a)$, να βρεις το a ώστε $(\vec{AB}, xx') = 240^\circ$

$\alpha < -\frac{5}{2}$

234. Να βρεις διάνυσμα που να σχηματίζει 60° με οριζόντιο άξονα και να έχει μέτρο 2

$(1, \pm\sqrt{3})$

235. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{5}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το $|\vec{v}|$, καθώς και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{\alpha}$.

236. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως: $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} \parallel \vec{\beta}$, $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

237. Αν $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 120^\circ \Rightarrow |\vec{a} + 4\vec{\beta}| =$;

14

238. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 120^\circ \Rightarrow (\vec{a}, 3\vec{a} + 2\vec{\beta}) =$;



60

239. Ποιο το διάνυσμα $\vec{a} : |\vec{a}| = 2, (\vec{a}, \vec{i}) = 30, (\vec{a}, \vec{j}) = 60$

$(\sqrt{3}, 1)$

240. Δίνονται $\vec{a} = (1, 1), \vec{\beta} = (5, 10)$ να αναλύσεις το β σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο α

$\left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

241.

242. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$
- $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = 0$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0$

243. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι είναι αδύνατη η εξίσωση:

$$\left(1 + (\vec{\alpha})^2\right)x^2 - 2|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|x + \left(1 + (\vec{\beta})^2\right) = 0$$

244. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $6|\vec{\alpha}| = 3|\vec{\beta}| = 2|\vec{\gamma}|$, τότε να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$ και το $\vec{\beta}$ αντίρροπο με το $\vec{\gamma}$.

245. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4), \vec{\beta} = (2, -5)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε $\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = 5$ και $\vec{x} \cdot \vec{\beta} = -8$

246. Ν.δ.ο. το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων που έχουν ίδιο μέτρο $\Leftrightarrow$ είναι κάθετα'.

247. Ποιο διάνυσμα έχει μέτρο 2 και είναι κάθετο στο $\vec{a} = (-3, 4)$

$\left(\frac{-8}{5}, \frac{6}{5}\right), \left(\frac{8}{5}, \frac{-6}{5}\right)$

248. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 2), B(1, 1), C \in \gamma\gamma'$. Ποιο το Γ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Γ.

$(0, 0), (0, 3)$

Το νου σας



249. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- Αν τα $\vec{\beta}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

250. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 8)
- Να γραφεί το $\overrightarrow{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

251. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-2,5), Β(7,8), Γ(1,-4)

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 10)
- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία ΒΑΓ. (Μονάδες 5)

252. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)
- Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (Μονάδες 10)

253. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

254. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(6,3), Δ(1,-2) και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

- Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0). (Μονάδες 8)
- $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{DG} = (8, 4)$. (Μονάδες 8)
- $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DG}$. (Μονάδες 9)



255. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{V} = (3,0)$ και $\vec{W} = (-3,4)$.

- Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)
- Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{V}$ και $\vec{W}$. (Μονάδες 10)
- Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα. (Μονάδες 3)

256. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$. Να υπολογίσετε:

- το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)
- το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 12)

257. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2,1)$ και $\vec{AG} = (3,-1)$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = (1,-2)$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BG}$. (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$. (Μονάδες 8)

258. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε την $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$. (Μονάδες 7)

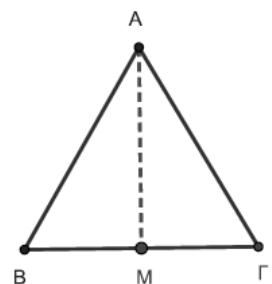
259. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς BΓ.

Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- i) $(\vec{AB}, \vec{AG})$ ii) $(\vec{AM}, \vec{BG})$ iii) $(\vec{AM}, \vec{GA})$
- iv) $(\vec{BM}, \vec{GM})$ v) $(\vec{GM}, \vec{GB})$ (Μονάδες 10)

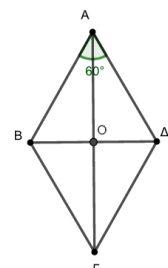
Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i) $\vec{AM} \cdot \vec{BG}$ ii) $\vec{AM} \cdot \vec{GA}$ iii) $\vec{GM} \cdot \vec{GB}$ (Μονάδες 15)



260. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με κέντρο O, πλευρά 4 και $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- $\vec{AD} \cdot \vec{BG}$





- $\overrightarrow{ΟΔ} \cdot \overrightarrow{ΑΟ}$
- $\overrightarrow{ΟΔ} \cdot \overrightarrow{ΟΒ}$
- $\overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΓΔ}$

(Μονάδες 25)

261. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (Μονάδες 9)
- Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox . (Μονάδες 10)
- Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 6)

262. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 16)
- Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. (Μονάδες 9)

263. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

- Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

264. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

- το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΓΔ}$. (Μονάδες 12)
- τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 13)

265. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)
- Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

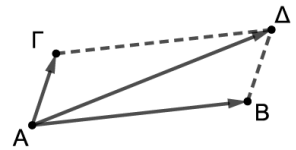
266. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$. (Μονάδες 7)
- Αν $\vec{v} = \overrightarrow{ΑΒ}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)



267. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

- των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)
- του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 8)
- του σημείου Δ . (Μονάδες 5)



268. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

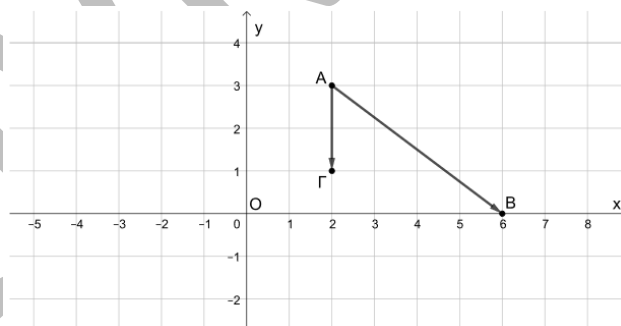
- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)
- Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος A Γ . (Μονάδες 7)

269. Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

- Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ . (Μονάδες 8)
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AB $\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

270. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

- Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0, -2)$. (Μονάδες 12)
- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 13)



271. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και

$$\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

- Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)
- Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\delta}|$. (Μονάδες 8)



- Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

272. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

- Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$. (Μονάδες 8)
- Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ (Μονάδες 8)

273. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{AG}$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$ (Μονάδες 9)
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$. (Μονάδες 9)
- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$. (Μονάδες 7)

274. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 15)

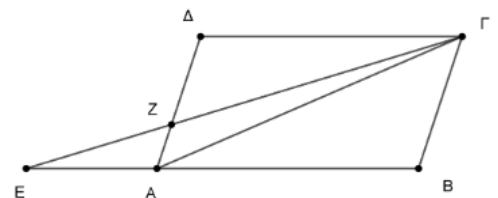
275. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε

$$\vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB} \text{ και } \vec{AZ} = \frac{1}{3}\vec{AD}.$$

- Να αποδείξετε ότι: $\vec{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

- Να αποδείξετε ότι: $\vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ}$. (Μονάδες 9)
- Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



276. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

- Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B . (Μονάδες 10)
- Να βρείτε:
 - την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ε . (Μονάδες 5)



- το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ' . (Μονάδες 5)
- το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ϵ . (Μονάδες 5)

277. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$. Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε

$$\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB}). \text{Να αποδείξετε ότι:}$$

- $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ (Μονάδες 8)
- $\vec{OM} = \vec{j}$ (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$. (Μονάδες 9)

278. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο του επιπέδου M, τέτοιο ώστε: $\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{AG} = \vec{0}$.

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, M είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του BΓ. (Μονάδες 2)
- Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \kappa$ και $\vec{AM} \cdot \vec{BG} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{AG}, \vec{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \vec{AG} = \lambda \vec{AB}$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$. (Μονάδες 7)
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

279. Δίνονται τα σημεία A(-3, -1), B(0, 3) και M(x, y) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{MB}$ και $\vec{AB}$. (Μονάδες 6)
- Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{MB}$ και $\vec{AB}$. (Μονάδες 6)
- Να αποδείξετε ότι $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)
- Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$ ». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

280. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ και $\vec{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)
- Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)
- Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)



- Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

281. Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

- Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)
 - Το τρίγωνο AB Γ να είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$. (Μονάδες 7)
- Για $\lambda = -2$, να βρείτε:
- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)
 - Το εμβαδόν του τριγώνου AB Γ . (Μονάδες 6)

282. Δίνεται τρίγωνο AB Γ και Δ, Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και A Γ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\vec{AB} = \kappa \cdot \vec{A\Delta}$ και $\vec{A\Gamma} = \lambda \cdot \vec{A\epsilon}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

- Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta\epsilon}$ και $\vec{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)
- Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\vec{B\Gamma} \parallel \vec{\Delta\epsilon}$ και $|\vec{B\Gamma}| = \kappa |\vec{\Delta\epsilon}|$. (Μονάδες 10)
- Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\vec{\Delta\epsilon}$ και $\vec{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

283. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)
- Να βρείτε τους αριθμούς x ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 9)
- Να βρείτε τους αριθμούς x ώστε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά. (Μονάδες 9)



284. Ν.δ.ο. $(\vec{a}\vec{\beta})\vec{\gamma} - (\vec{a}\vec{\gamma})\vec{\beta} \perp \vec{a}$

285. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \sqrt{3}$

286. Αν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|, |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

287. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}, (\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta}), |\vec{a} - \vec{b}| = 2$, να βρεις :

• $|\vec{a}|$

• $|\vec{\beta}|$

$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{\beta}| = 1$

288. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta} : (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}, \vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta}), \vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x}) \Rightarrow \vec{x} =$;

$\vec{x} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

289. Αν $\vec{x} + (\vec{x}\vec{a})\vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{x} =$;

$\vec{x} = \vec{\gamma} - \frac{\vec{a}\vec{\gamma}}{1 + \vec{a}\vec{b}}\vec{b}$

290. Ν.δ.ο. $|\vec{a}\vec{\beta}| \leq |\vec{a}||\vec{\beta}|$.

291. Δίνονται $x, y : x^2 + y^2 = 36$ & $A = 6x - 8y$, να βρεις

- την ελάχιστη τιμή του A
- την μέγιστη τιμή του A

292. Ν.δ.ο. $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 10$

293. Αν $\vec{a} = (1, 2), \vec{\beta} = (3, 4)$, όπου $\vec{a} = \vec{\gamma} + \vec{x}, \vec{\gamma} \parallel \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{\beta}$, να βρεις

• $\vec{\gamma}$

• $\vec{x}$

294. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{a} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$

295. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και τα διανύσματα $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}, \vec{d} = \vec{a} - \vec{\beta}, (\vec{c}, \vec{d}) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) =$;

296. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{a}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} = -2$, να αποδείξεις ότι :

• $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{0}$

• $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$



297. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (3, \sqrt{3} - 6), \vec{c} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, να βρεις το γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{a}, \vec{b}$ που έχει μέτρο 2 και είναι κάθετο στο $\vec{c}$.

298. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} : |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}, \vec{c} / \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} =$;

$\frac{3}{7}$

299. Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι μοναδιαία, $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} = 2 \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$

300. Δίνονται διανύσματα $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = \sqrt{3}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c} =$;

-4

301. Δίνονται τα μοναδιαία $\vec{a}, \vec{b}, (3\vec{a} + 4\vec{b}) \perp \left(\vec{a} - \frac{10}{11}\vec{b}\right) \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) =$;

302. Ν.δο. $(\vec{a}\vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$

303. Σε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $|\vec{AB}| = 2, |\vec{AD}| = 1, \angle A = 60^\circ$, να βρεις τα μήκη των διαγωνίων του.

$\sqrt{7}, \sqrt{3}$

304. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, (3\vec{a} + 4\vec{b}) \perp \left(\vec{a} - \frac{10}{11}\vec{b}\right) \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) =$;

305. Αν $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| = 2|\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}|\vec{b}|$

306. Αν ΑΒΓΔ # με $|\vec{AB}| = 2, |\vec{AD}| = 3, |\vec{AG}| = 4 \Rightarrow |\vec{BD}| =$;

$\sqrt{10}$

307. Ποια τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} : \vec{a} = (-3, |\vec{b}|), \vec{b} = (1 - |\vec{a}|, \sqrt{2})$

$\vec{a} = (-3, \sqrt{27}), \vec{b} = (-5, \sqrt{2})$

308. Αν $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}, |\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 14, |\vec{c}| = 15 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c} =$;

-97

309. Αν $\vec{a} - 2\vec{b} + 6\vec{c} = \vec{0}, |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 1 \Rightarrow (\vec{b}, \vec{c}) =$;

60

Αν $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ συνήθως στέλνεις κάθε φορά ένα δμα στο 2^ο μέλος και μετά υψώνεις στο τετράγωνο.

Να εξετάσεις αν ή πότε ισχύουν σχέσεις με μέτρα : ύψωσε στο τετράγωνο.

Αν $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 1, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4 \Rightarrow \vec{b} = 2\vec{a}$

Αν

$\sin(\vec{a}, \vec{b}) = -1, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 9 \Rightarrow \vec{b} = -3\vec{a}$



310. Αν $|\vec{a}|=4, |\vec{\beta}|=\sqrt{3}, (\vec{a}, \vec{\beta})=30^\circ, \vec{x} // (\vec{a} + \vec{\beta}), \vec{\beta} \perp (\vec{a} - \vec{x}) \Rightarrow \vec{x} =$

$$\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$$

311. Αν $\vec{a} + \vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}, |\vec{a}| = \frac{|\vec{\beta}|}{5} = \frac{|\vec{\gamma}|}{2} \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

312. Να λυθεί η εξίσωση : $(\vec{x}\vec{a})\vec{\beta} + 5\vec{x} = \vec{\gamma}, \vec{a} = (1, 4), \vec{\beta} = (-1, 2), \vec{\gamma} = (-2, 3)$

313. Να βρεις την προβολή του $\vec{\beta} = (8, 16)$ πάνω στο $\vec{a} = (3, 1)$

$$(12, 4)$$

314. Αν ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = 3\vec{\beta}, \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{a} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}) =$

$$30$$

315. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}: |\vec{a}|=2, |\vec{\beta}|=\sqrt{3}, (\vec{a}, \vec{\beta})=30^\circ, \vec{\gamma} = 5\vec{a} - 4\vec{\beta}$, να βρεις

- $\text{προβ}_{\vec{\gamma}} \vec{a}$
- $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma}$

316. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}: \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$

- $\vec{a}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{a}$
- Να βρεις τις γωνίες των διανυσμάτων ανά δύο

$$120$$

317. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-4, 3), \vec{b} = (5, 12), \vec{x}: |\vec{x}| = \sqrt{37}, \vec{x} \perp (2\vec{a} + 3\vec{b}) \Rightarrow \vec{x} =$

$$(-6, 1), (6, -1)$$

318. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\vec{A\Gamma} = (-4, 7), \vec{B\Delta} = (-8, 1)$, να βρεις :

- $\vec{AB}$
- $\vec{AD}$

$$(2, 3), (-6, 4)$$

319. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}: \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, |\vec{\beta}| = \sqrt{15}, (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 5,$

- να βρεις το $|\vec{\alpha}|$ και
- ν.δ.ο. $\vec{u} \perp \vec{v}, \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}, \vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

$$5$$

Να βρεις την προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{\beta}$ τότε

$$\vec{a}\vec{\beta} = \vec{\beta}\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}, \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = \lambda\vec{\beta}$$

Να βρεις το $|\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$: υπολόγισε $(\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2$

συνω=1 τότε ομόρροπα

συνω=-1 τότε αντίρροπα

συνω=0 τότε κάθετα

συνω>0 τότε γωνία οξεία

συνω<0 τότε γωνία αμβλεία



320. Αν $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PG}$, $|\vec{PA}| = 6$, $|\vec{PB}| = |\vec{PG}| = 2\sqrt{3}$ τότε

- ν.δ.ο. τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά ,
- $APB = 90$
- $\vec{PB} + \vec{PG} \perp \vec{AG}$

321. Αν $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 30$, $\vec{x} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x}) \Rightarrow \vec{x} =$;

$$\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

322. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,1)$, $\vec{\beta} = (3,4)$, $\vec{x} // \vec{\alpha}$, $\vec{y} \perp \vec{\beta}$, $\vec{x} = \vec{\beta} + 2\vec{y} \Rightarrow \vec{x}, \vec{y} =$;

323. Αν $\vec{\alpha} \not// \vec{\beta}$, $(\vec{x} - \vec{\alpha}) // \vec{\alpha}$, $(\vec{x} - \vec{\beta}) // \vec{\beta} \Rightarrow \vec{x} =$;

$$\vec{x} = -\vec{a} - \vec{b}$$

324. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} : |\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60$, $(\vec{\alpha} + \vec{x}) // \vec{\beta}$, $(\vec{x} + \vec{\beta}) // \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{x} =$; $|\vec{x}| =$;

$$\vec{x} = -\vec{a} - \vec{b}, |\vec{x}| = \sqrt{7}$$

325. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} : \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\gamma}| = 1$, να βρεις το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

$$\vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{8}\vec{b}$$

326. Αν $\vec{\alpha} = (1,2)$, $\vec{\beta} = (3,1)$, να βρεις την προβολή του β πάνω στο α

$$(1,2)$$

327. Αν $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{1}{4}\vec{\beta}$, $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} \Rightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$;

328. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 30$, $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} \Rightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\gamma} =$;

329. Αν $\vec{\alpha} \not// \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \Rightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\alpha} + \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\beta} = \vec{0}$

330. Αν $\vec{\alpha} = (1,2)$, $\vec{\beta} = (-1,0)$, $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + |\vec{\gamma}|\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\gamma}| =$;

$$\frac{5}{2}$$

331. Να βρεις το $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2)\vec{j} - 4\vec{i}$

$$(-4,3)$$

332. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}) \perp (2y\vec{\alpha} - 3x\vec{\beta}) \Rightarrow |\vec{\beta}|, |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| =$;

333. Ν.δ.ο. για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα : $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \right) \vec{\beta}$

334. Ν.δ.ο. για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα : $(\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}, \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$



335. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}, \text{προβ}_{2\vec{\alpha}+\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \lambda =$;

$-\frac{11}{9}$

336. Να αποδείξεις ότι για οποιοδήποτε διανύσματα : $|\vec{\alpha}\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.

- Επιπλέον να βρεις τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της ποσότητας $A = 6x - 8y, x^2 + y^2 = 36$.
- Επίσης ν.δ.ο. $|6\eta\mu\chi - 8\sigma\upsilon\nu\chi| \leq 10$

337. Αν Ο η αρχή των αξόνων και $A: (OA) = 3$, να βρεις που κινούνται τα σημεία Μ : $\vec{OM}(\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 7$

$\rho = 4$

338. Να αποδείξεις ότι για οποιαδήποτε διανύσματα :

- $\vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 + (\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}))^2$ και
- επιπλέον $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow |\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

339. Να αποδείξεις ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $A = 90 \Rightarrow \vec{AB}^2 + \vec{AG}^2 = \vec{BG}^2$

340. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (-1, -7), \vec{GB} = (3, -3)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

341. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$
- $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

$-1, 3, 37$

342. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{3\pi}{4}$ να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων :

- $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

$\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$

343. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μοναδιαία και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων :

- $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

344. Ένα παραλληλόγραμμο κατασκευάζεται με τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Δίνεται ότι

$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$.

- Να εκφράσετε τις διαγώνιες του παραλληλογράμμου συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
- Να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων.
- Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων.



$$4\alpha + \beta, 2\alpha + 3\beta, \sqrt{10}, \sqrt{10}, 90$$

345. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=60^\circ$ και το τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}, \vec{B\Gamma}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$,

- Να δείξετε ότι $\vec{AM}=\frac{5\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$ όπου το Μ μέσο της ΒΓ.
- Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.
- Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{A\Gamma}$.

$$\frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{4\sqrt{19}}{19}$$

346. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και τα $\vec{v}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}, \vec{v}=-7\vec{\alpha}+8\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

$$60$$

347. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν συγχρόνως, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha}+\vec{\beta}), |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$. Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

$$\sqrt{2}$$

348. Αν $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=6$ να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v}=3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}, \vec{v}=3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

$$\pm \frac{3}{2}$$

349. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0, |\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\beta}|}{2}=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να δείξετε ότι

- $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$
- $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.

350. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=0, |\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=3, |\vec{\gamma}|=1$, να βρεις $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

$$3$$

351. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-5, 2), \vec{\beta}=(2, 3)$. Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ώστε $\vec{\gamma} \parallel \vec{\beta}, \vec{\delta} \perp \vec{\beta}, \vec{\alpha}=\vec{\gamma}+\vec{\delta}$

$$\vec{\gamma}=(14, 21), \vec{\delta}=(-19, -19)$$

352. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AM} = 0$.

353. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2, 1), \vec{\beta}=(-1, 1), \vec{\gamma}=(3, 5)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε να είναι $(\vec{x} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta} + 2\vec{x} = \vec{\gamma}$.

$$(7, -3)$$

354. Δίνεται τρίγωνο ABΓ στο οποίο είναι $|\vec{AB}|=4, |\vec{A\Gamma}|=6$ και η γωνία των $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε

- Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{AM}$.
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{AM}$ με το $\vec{AB}$.



- Να αποδείξετε ότι η προβολή του $\vec{AB}$ πάνω στο $\vec{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\vec{AM}$.

355. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3}), \vec{\beta} = (\sqrt{3}, 1)$.

- Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της προβολής του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.
- Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-1, \kappa)$ το οποίο να σχηματίζει με το $\vec{\alpha}$ γωνία ίση με 60° .

$$30, \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), k=0, k=\sqrt{3}$$

356. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{B\Gamma} = \vec{\alpha}, \vec{\Gamma A} = \vec{\beta}, \vec{BA} = \vec{\gamma}$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}, |\vec{\gamma}| = 1$ τότε,

- Να δείξετε ότι $4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 12\vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = 0$.
- Να βρείτε τη γωνία Γ του τριγώνου.
- Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου BM .

$$30, \frac{\sqrt{7}}{2}$$

357. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει

$$\vec{x} \parallel (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}), \vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$$

- Να βρείτε το $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{\alpha}$

$$\vec{x} = -\frac{1}{9}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$$

358. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

359. Το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 6$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

360. Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, με $|\vec{a}| = 3, |\vec{\beta}| = 7$ να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

361. Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, με $|\vec{a}| = 9, |\vec{\beta}| = 4$ να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

362. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}, \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 150^\circ$. Να βρείτε :

- Το $|\vec{a}|$
- Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - \vec{\beta})$



363. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογισθούν τα εσωτερικά γινόμενα :

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$
- $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$
- $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

364. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$
- $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

365. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- $\vec{\alpha} = (3,5)$ και $\vec{\beta} = (4,2)$
- $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1,5)$ iii) $\vec{\alpha} = (-4,2)$ και $\vec{\beta} = (2, -6)$

366. Αν $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (1,3)$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- $(-\vec{\alpha}) \cdot (2\vec{\beta})$
- $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

367. Δίνονται τα σημεία $A(3,1), B(2, -5), \Gamma(-4,3)$ και $\Delta(-1, -2)$. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

368. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 8, 1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$. Να βρείτε :

- Το λ
- Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

369. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(3,5), B(x, x - 4)$ και $\Gamma(-5,11)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = -32.$$



- Να βρείτε το x
- Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών $BΓ$ και AB αντίστοιχα, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GN}$$

370. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $|\vec{a}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Αν ισχύει ότι $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 28$, να βρείτε :

- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Το $|\vec{b}|$
- Το εσωτερικό γινόμενο $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

371. Έστω AD το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου $ABΓ$ με πλευρά $a = 4$. Να υπολογιστούν οι αριθμοί :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BΓ}$
- $\overrightarrow{AΓ} \cdot \overrightarrow{DA}$

372. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

373. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$

374. Αν $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1$ και $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

375. Αν $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

376. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ και το τρίγωνο $ABΓ$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{AΓ} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου $ABΓ$.

377. Αν $|\vec{b}| = 2, |\vec{a}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} + 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

378. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, \sqrt{3})$ και $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$. Να βρεθεί η γωνία θ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

379. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, -4)$ και $\vec{b} = \frac{1}{7}\vec{i} + \vec{j}$. Να βρεθεί η γωνία θ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

380. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$, όπου το $\vec{a}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{b}| = 2$ και η γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$ είναι 120° . Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta} = 2\vec{a} - \vec{b}$ και $\vec{a}$.



381. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και τα $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}, \vec{u} = -7\vec{a} + 8\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.
382. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = 120^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}$.
383. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(4,3), B(1,2), \Gamma(6,7)$. Να υπολογιστεί η γωνία A του τριγώνου.
384. Αν $A(4,1), B(8,2)$ και $\Gamma(1,3)$, να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αμβλεία.
385. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε τα παρακάτω διανύσματα να είναι κάθετα :
- $\vec{a} = (3, -5)$ και $\vec{\beta} = (10, x)$
 - $\vec{a} = (2x, 1)$ και $\vec{\beta} = (4x^2, -1)$
 - $\vec{a} = (x, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$
 - $\vec{a} = (3x, -3)$ και $\vec{\beta} = (x, 4)$
386. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, \lambda - 1), \vec{\beta} = (\lambda + 2, -1)$ δεν είναι κάθετα.
387. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, 3)$ και $\vec{\beta} = (-6, \lambda + 2)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :
- Τον αριθμό λ
 - Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ είναι $(\vec{a} - \vec{\beta}) \perp (\mu\vec{a} + \vec{\beta})$
388. Δίνονται δυο κάθετα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν : $|\vec{a}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{6}$. Να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα.
389. Δίνονται δυο κάθετα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν : $|\vec{\beta}| = \sqrt{15}$ και $(\vec{a} + 3\vec{\beta}) \cdot (2\vec{a} - \vec{\beta}) = 5$
- Να βρείτε το $|\vec{a}|$
 - Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = 2\vec{a} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{w} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.
390. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4 - \lambda)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει : $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (13\vec{a} + 3\vec{\beta})$
- Να βρείτε το λ
 - Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 5\vec{a} + 2\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta} = (\mu, \mu - 8)$
391. Αν τα διανύσματα $\vec{a} = (x, -3)$ και $\vec{\beta} = (6, x + 2)$ είναι κάθετα



- Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta} = (1,5)$.
- 392. Δίνονται δυο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha^2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.
- Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$
- Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{w} = \lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα.
- 393. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, και $|\vec{\beta}| = 6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να είναι κάθετα.
- 394. Να βρείτε το διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\vec{v} = (1,2)$ και έχει μέτρο $\sqrt{5}$.
- 395. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου. Αν είναι $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$
- 396. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A(0,0), B(\alpha, \beta), \Gamma(\alpha + 2, \beta)$ και $\Delta(2,0)$. Να αποδειχθεί ότι :
- 397. i. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο,
- 398. ii. Αν $B\Gamma = 2AB$ και M είναι το μέσο της $A\Delta$, τότε $\vec{MB} \perp \vec{MG}$
- 399. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1,2), B(3,4), \Gamma(5,4)$ και $\Delta(3, -2)$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ , παίρνουμε τμήμα ΓE , έτσι ώστε $B\Gamma = 2\Gamma E$. Αν K, Λ, N είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ και $A\Delta$ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι $\vec{K\Lambda} \perp \vec{NE}$.
- 400. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα M, N των $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\vec{BN} \perp \vec{AM}$.
- 401. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. Αν $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, να αποδειχθεί ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{3}$.
- 402. Αν $\vec{PA} + \vec{PB} - 2\vec{PF} = \vec{0}$, $|\vec{PA}| = 6$ και $|\vec{PB}| = |\vec{PF}| = 2\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι :
 - Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά
 - Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A και B
 - $\widehat{APB} = 90^\circ$
- 403. iv. το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{PB} + \vec{PF}$ είναι κάθετο στο $\vec{AG}$. (Θέμα εξετάσεων)
- 404. Αν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$, τότε :



- Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
- Να υπολογίσετε τη γωνία των $\vec{a}, \vec{\beta}$

405. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ να δείξετε ότι $\vec{a} = \vec{\gamma}$.

406. Αν $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε :

- Το $|\vec{\gamma}|$
- Το $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -7$

407. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}), (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})$ και $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{a}})$.

408. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{a}| = 3, |\vec{\beta}| = 2, (\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και $\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
- Να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$
- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει η σχέση $(\vec{a} + x\vec{\beta}) \cdot (2\vec{a} - x\vec{\beta}) = 17$.

409. Να αποδείξετε ότι : $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 - |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

410. Να αποδείξετε ότι : $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 \geq 4|\vec{a}||\vec{\beta}|$

411. Αν ισχύει ότι $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$

412. Αν ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|$ και $\vec{a} + \vec{\beta} = 4\vec{\beta} - 5\vec{a}$, να αποδείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$.

413. Αν ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = 3|\vec{a}|$ και $|2\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}|$, να αποδείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$.

414. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1$, να αποδείξετε ότι $\vec{a} = \vec{\beta}$.

415. Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

416. Έστω x, y δυο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει : $x^2 + y^2 = 25$. Να αποδειχτεί ότι

$$|6x - 8y| \leq 50.$$

417. Έστω $\vec{a} = (-1, 2)$.

- Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε $\vec{v} \perp \vec{a}$ και $|\vec{v}| = 5$.



- Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ ώστε $\vec{u} \parallel \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = \sqrt{45}$.

418. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (1,-2)$ και $\vec{\gamma} = (4,-3)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\gamma}$ και έχουν μέτρο 5.
419. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$ και $\vec{\gamma} = (-1,0)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ώστε να είναι $|\vec{v}| = 10$ και $\vec{v} \perp \vec{\gamma}$.
420. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$.
421. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
422. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\sqrt{5}$ να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$.
423. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και ότι για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει : $(3\kappa\vec{\alpha} + 4\lambda\vec{\beta}) \perp (\lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta})$
- Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$
 - Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

