



Παράγωγοι



Κώστας Γλυκός

ΕΠΑΛ

Κεφάλαιο 1

747 ασκήσεις σε 92 σελίδες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ιδιαίτερα μαθήματα

697.300.88.88

Kglykos.gr

2/12/2025

εκδόσεις

Καλό πήξιμο



Πεδία Ορισμού

Τα πάντα για παραγώγους
(ΕΠΑΛ)

Να βρεις τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

1. $f(x) = \sqrt{x-9}$

2. $f(x) = \frac{x}{x-3}$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-6}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-6}}{x^2-16}$

5. $f(x) = \sqrt{9-x} + \sqrt{x-4}$

6. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x-6}}$

7. $f(x) = \frac{x^3-1}{|x-1|-2}$

8. $f(x) = \sqrt{3-|x|}$

Να βρεις τα πεδία ορισμού

9. $f(x) = x^3 - 2x$

10. $g(x) = \sqrt{x-1}$

11. $h(x) = \sqrt{x^2-2x}$

12. $f(x) = \frac{2012}{x^2-2x}$

13. $g(x) = \sqrt{x^3-1}$

14. $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

15. $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

16. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

17. $f(x) = \frac{x^{2013}}{x^2-1}$

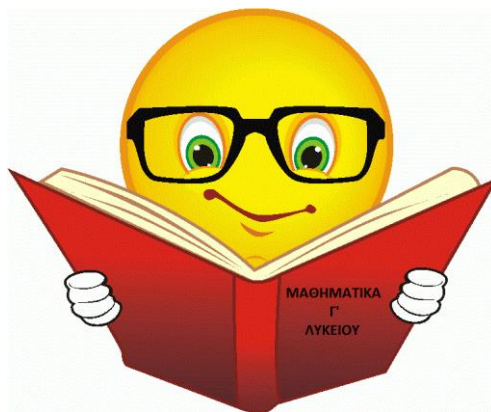
Να βρεις τα πεδία ορισμού

18. $f(x) = x^3 - 2x$

19. $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

20. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

21. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



Πεδίο ορισμού :

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow g(x) \geq 0$$



22. $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$

23. $g(x) = \sqrt{x^3 - x}$

24. $f(x) = \frac{2012}{x^2 - 16}$

25. $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

26. $f(x) = \sqrt{6x - 2x^2}$

27. $g(x) = \frac{x-1}{x-5}$

28. $h(x) = \frac{x^{2019}}{x^2 - 9}$

29. **Να βρεις πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :**

30. $f(x) = \frac{3x}{5-x}$

31. $f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}$

32. $f(x) = \frac{1}{2(x-1)(5+x)}$

33. $f(x) = \sqrt{2-4x}$

34. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

35. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

36. $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$

37. $f(x) = \sqrt{8-4x} - \frac{1}{x-1}$

38. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{3}{2x-6}$

39. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-5}$

40. $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$



41.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 5, x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(0), f(-1), f(-3), f(5)$

42.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2}{4}, x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-2), f(4), f(\sqrt{2}), f\left(\frac{1}{2}\right)$

43.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x - 4, x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-3), f(f(-1)), f(2), f\left(-\frac{1}{3}\right)$

44.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5, & x \in (-\infty, 3) \\ x^2 + 2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-2), f(f(-4)), f(4), f(1)$

45.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq -2 \\ \frac{4}{2+x}, & -2 < x < 3 \\ 5, & x \geq 3 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-3), f(-2), f(0), f(4)$

β) Να δείξετε ότι: $f(-2) - f(2) + f(2021) = 4$



46.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 2, x \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2x)$ και $f(x-1)$

β) Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες $f(x) = -1$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $A = f(x) - f(-x)$

ii) $B = f(x+1) - f(2x)$

47.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + \alpha x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Αν $f(1) = 2$, δείξτε ότι $\alpha = 3$

β) Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(x^2)$ και $f(-3x)$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες $f(x) = 2$

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(x-2) - 2f(x)$

48.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}, x \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2x+1)$ και $f\left(\frac{x}{2}\right)$

β) Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες $f(x) = 0$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(-1) - 2f(2)$

49.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{3x - 6}$

β) $f(x) = \frac{7x - 9}{8 - 4x}$

γ) $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 10} - \frac{1}{3 - x}$

δ) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 1}$

ε) $f(x) = \frac{3x + 9}{x - x^2}$

στ) $f(x) = \frac{x + 1}{-x^2 + 5x}$



50.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= \frac{-x^2 + 4x - 2}{9 - x^2} & \beta) f(x) &= \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} & \gamma) f(x) &= \frac{3x^3 + 5}{-6x + 3} \\ \delta) f(x) &= \frac{5+x}{8+x} + \frac{2x+4}{3x-9} & \epsilon) f(x) &= \frac{x^3 - 1}{x^2 - 7x + 6} & \sigma\tau) f(x) &= \frac{x^2 + 2x + 1}{-x^2 - x + 6} \end{aligned}$$

51.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= \frac{2-x}{x^2 - 6x + 9} & \beta) f(x) &= \frac{x}{x^2 + 2x + 3} & \gamma) f(x) &= \frac{3x^3 + 5}{-2x^2 - 5x + 3} \\ \delta) f(x) &= \frac{x^2 - 7x + 14}{3x^2 - 2x - 1} & \epsilon) f(x) &= \frac{x^3 - 6x + 3}{x^2 + 2x + 15} & \sigma\tau) f(x) &= \frac{x^2 + 2x + 1}{9x^2 - 12x + 4} \end{aligned}$$

52.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= \frac{x+9}{x^3 + x^2 - 3x - 6} & \beta) f(x) &= \frac{x^2 - 7x + 10}{|x+1| - 4} & \gamma) f(x) &= \frac{5x-2}{x^3 - 8} \\ \delta) f(x) &= \frac{x^2 - 7x + 10}{x^3 + 2x^2 - x - 2} & \epsilon) f(x) &= \frac{8-x^2}{-x^3 + x^2 + 3x - 6} \end{aligned}$$

53.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= \frac{x^2 - 4x}{-2x^3 - 6x^2 - 8x - 4} & \beta) f(x) &= \frac{x^2 + x}{|2x-8| + 8} \\ \gamma) f(x) &= \frac{3x-6}{||x-2|-3|-1} & \delta) f(x) &= \frac{4-x^2}{|x+1| + 5} \end{aligned}$$

54.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= \sqrt{3-x} & \beta) f(x) &= \sqrt{x+5} & \gamma) f(x) &= \sqrt{3x-12} \\ \delta) f(x) &= \sqrt{-2x-10} \end{aligned}$$



55.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) f(x) = \sqrt{x^2 - 9} & \beta) f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \gamma) f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10} \\ \delta) f(x) = \sqrt{-2x^2 + 6x} & \epsilon) f(x) = \sqrt{x^2 + 25} & \sigma\tau) f(x) = \sqrt{-x^2 + 4} \end{array}$$

56.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} & \beta) f(x) = \sqrt{x^2} & \gamma) f(x) = \sqrt{-5x^2 + 10x} \\ \delta) f(x) = \sqrt{x^2 + 9} & \epsilon) f(x) = \sqrt{-2x^2 + x} & \sigma\tau) f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \end{array}$$

57.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} \alpha) f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 17x - 15} & \beta) f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x| - 3} \\ \gamma) f(x) = \sqrt{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6} & \delta) f(x) = \sqrt{|x - 3| + 4} \end{array}$$

58.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \beta) f(x) = \varepsilon\varphi\frac{x}{4} \quad \gamma) f(x) = \varepsilon\varphi\left(-x + \frac{\pi}{6}\right)$$

59.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sigma\varphi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \beta) f(x) = \sigma\varphi\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \gamma) f(x) = \sigma\varphi\frac{2x}{3}$$

60.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1} - 3} & \beta) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x+3} & \gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 3}{x-2} \\ \delta) f(x) = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{2 - \sqrt{x+1}} & \epsilon) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+3}} & \end{array}$$



61.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-4x+4}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{x^2-x} + \frac{1}{x}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2} + \sqrt[3]{x-2}$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-1} + \sqrt{-2x+6}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{5-|x|}}$$

62.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$

α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(1) = 3$ και $f(2) = 5$, να δείξετε ότι: $\alpha = -1$ και $\beta = 3$

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(4)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 5$

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)-23}$

63.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(-1) = -3$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2), f(3), f(f(1))$

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της συνάρτησης f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

δ) Να λύσετε την ανίσωση την ανίσωση $f(x) \leq -x^2$



64.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+\alpha}{x^2+2x-3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = -2$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να δείξετε ότι $\alpha = 6$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{3}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq x$

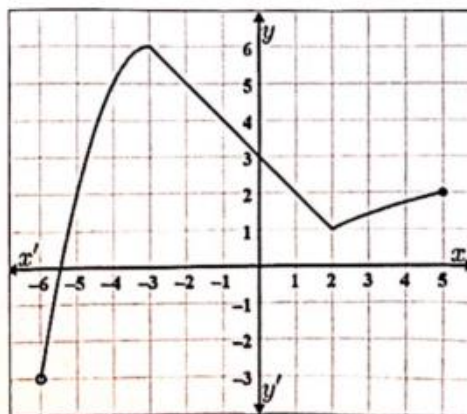
65.

3.4 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3)$, $f(f(5))$, $f(-4)$, $f(f(1))$

γ) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .



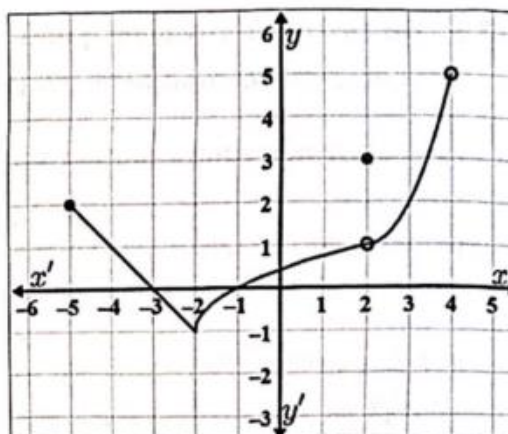
66.

3.5 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(f(3))$, $f(f(-5))$, $f(-4)$

γ) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

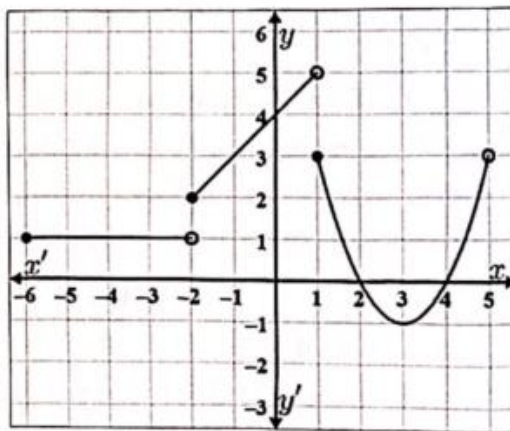




67.

3.6 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

- α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-6)$, $f(-2)$, $f(f(1))$, $f(f(0))$, $f(f(-1))$
- γ) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .



Πρόσημο συναρτήσεων

Να βρεις το πρόσημο :

68. $P(x) = x^2(x-2)$

69. $P(x) = x(x^2-16)$

70. $P(x) = x^3(x-2)(x+1)$

71. $P(x) = x^4(3-x)(x^2+3)$

72. $P(x) = (1-x)^2(x-2)(3-x)$

73. $P(x) = 4x(x^2+x-2)^3$

74. $P(x) = x^3(x-2)^2(1-x)^5$

75. $P(x) = \frac{x(x-2)}{x-1}$

76. $P(x) = \frac{x^3(1-x)}{(x^2-3x)}$

77. $P(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Πρόσημο τριωνύμου:

$$ax^2 + bx + c$$

Βρίσκεις ρίζες (αν υπάρχουν) και τις βάζεις στον πίνακα τιμών. Ξεκίνα από δεξιά με το πρόσημο της μεγαλύτερης δύναμης και κάθε φορά που περνάς από ρίζα αλλάζεις πρόσημο.

Το νου σου : Αν $\Delta=0$, θα έχω διπλή ρίζα, άρα δε θα έχω εναλλαγή προσήμου.



Να λυθούν οι ανισώσεις γινομένου και πηλίκου :

78. $(x^2 - 3x + 4)(x - 7) > 0$

79. $(36 - 4x^2)(4 - x) < 0$

80. $-5x(2x^2 + x - 3) \leq 0$

81. $(-4x^2 - 4x - 1)(x^2 + 3) \geq 0$

82. $(2x^2 + 3x + 7)(4x - x^2) \leq 0$

83. $(x - 3)^2(x^2 - 9) > 0$

84. $(x - 5)(x^2 + 3)(x^2 - 16) \geq 0$

85. $(x^2 + 3x)(x^2 - 9)(3 - x) \geq 0$

86. $x^2(x - x^3)(3 - 2x - x^2) \leq 0$

87. $\frac{x}{x-1} < 0$

88. $\frac{-x}{3-x} \geq 0$

89. $\frac{x+4}{x+7} > 0$

90. $\frac{4-x}{3-x} \leq 0$

91. $3 + \frac{2}{x} > 0$

92. $-1 + \frac{2}{x+1} < 0$

93. $\frac{5}{x} - 3 \geq 0$

94. $\frac{-2}{3-x} + 1 \leq 0$

Ανίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$

τότε λύνεις την ανίσωση :

$P(x)Q(x) > 0$



Θέματα συναρτήσεων

Συνδυαστικά συναρτήσεων :

95. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$ υπολόγισε :

- $f(0), f(1), f(-1)$
- $f(-x), f(2x), f(x+1)$
- $f(f(x))$

96. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x$, να λύσεις τις εξισώσεις :

- $f(x) = -2$
- $f(x) = f(3)$
- $f(x) = f(x+1)$
- $f(f(x)) = f(0)$

97. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1, x \in \{-1, 0, 1\}$ βρεις σύνολο τιμών

98. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 - 2ax - 6}{x^2 - 2x + 1}, a \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο με τετμημένη 3, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- Την τιμή του a
- Να αποδείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2}$

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$, η οποία διέρχεται από τα σημεία : $A(-2, 5), B(-4, 3)$

- Να βρεις πεδίο ορισμού
- Να βρεις τα a, b
- Να βρεις που τέμνει άξονες
- Να δείξεις ότι $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$

100. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 7 - 2x - \sqrt{x-2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7 - 2x$

101. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a-x} - 3x$, η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε σημείο με τεταγμένη 2, να βρεις :

- Την τιμή του a



- Πεδίο ορισμού

102. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, να βρεις :

- Πεδίο ορισμού
- $f(1), f(3)$
- Να λύσεις $f(x) = 7$

103. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2ax+1, & x \geq 2 \\ bx+3, & x < 2 \end{cases}$ όπου $f(1) = f(2) = 5$, να βρεις :

- α, β
- $f(3), f(-3)$
- $f(x^2+2)$

104. Αν $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$, να υπολογίσεις : $f(0), f(2), f(-2)$

105. Αν $f(t) = (t+2)(t-3)$, να υπολογίσεις :

- $f(0), f(2), f(-2)$
- να βρεις πότε $f(t) = 0$

106. Αν $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$, να υπολογίσεις : $f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

107. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x^2 + 3x, g(x) = 9 - x^2$, να βρεις τύπο και πεδίο ορισμού των

$$\text{συναρτήσεων : } h(x) = f(x) + g(x), m(x) = f(x)g(x), k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

108. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x} - 3, g(x) = 3 + \sqrt{x}$, να βρεις τύπο και πεδίο ορισμού των

$$\text{συναρτήσεων : } h(x) = f(x) + g(x), m(x) = f(x)g(x), k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

109. Να βρεις τα σημεία τομής με τους άξονες των συναρτήσεων :

$$f(x) = -2x+1, g(x) = x^2 - 4x + 4, h(x) = \frac{x-1}{2-x}$$

110. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+a}{x-3}, g(x) = \frac{3x-3a}{3-x}, f(-2) = g(-2) \Rightarrow a = ;$

111. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2a + x^3, g(x) = a + x^2, f(3) + g(3) = 24 \Rightarrow a = ;$

112. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + ax + a - 6, g(x) = 2x - 3, A(2, -8) \in C_f$

- να βρεις το α
- που τέμνει η C_f τους άξονες
- που τέμνονται C_f, C_g



113. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + x - 1$, $g(x) = 2x + 1$, $f(1) = g(1)$

- να βρεις το a
- που τέμνονται C_f, C_g

114. Δίνεται $f(x) = x^2 - ax + 4$, $A(1, 7) \in C_f$, να βρεις πότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα

115. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = ax^2 + bx - 3$, $g(x) = 2\sqrt{2x^2 + 2}$, $A(-2, -5) \in C_f$, $f(1) = g(1) \Rightarrow a, b =$

116. Δίνεται $f(x) = \frac{ax-5}{\sqrt{x}-1}$, $A(4, 7) \in C_f$

- να βρεις πεδίο ορισμού
- το a
- πότε η συνάρτηση βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα

117. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x < 2 \\ 4 - 2x, & x \geq 2 \end{cases}$

- να βρεις: $f(1), f(2), f(3)$
- που τέμνει η συνάρτηση τους άξονες

118. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ a^2 - 8, & x = -1 \end{cases}$, $f(-2) = f(-1)$, $a > 0 \Rightarrow a =$

119.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 3$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -1)$ να υπολογίσετε την τιμή του a .

120.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + \beta x + 3$, με $\beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-2, 7)$

- Να υπολογίσετε την τιμή του β
- Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , αν το σημείο $B(\alpha + 1, 2\alpha^2 + 1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f



121.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3 + 2x^2 + \beta x - 6}{x - 2}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- β) Αν τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(-2, -1)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f να υπολογίσετε τις τιμές των α και β
- γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f

122.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4x + 8$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

123.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 + 2\alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- α) Να υπολογίσετε τον αριθμό α
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

124.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 2\beta x + \beta - 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -2 και τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 , να υπολογίσετε τις τιμές των α και β

125.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + 2x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3 και διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

126.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\alpha x + 2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του α
- β) Να υπολογίσετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$



127.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 4x - 12$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, -8)$

- Να υπολογίσετε την τιμή του α
- Να υπολογίσετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

128.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ και $g(x) = x+2$, να υπολογίσετε το σημείο τομής των 2 συναρτήσεων.

129.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+1}$ και $g(x) = x^2+4x$, να υπολογίσετε τα σημεία τομής των 2 συναρτήσεων.

130.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ και $g(x) = x+4$, να υπολογίσετε τα σημεία τομής των 2 συναρτήσεων

131.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x + 3$ και $g(x) = 2x^2 + x - 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-2, 5)$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g

132.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ και $g(x) = -x^2 + \alpha x + 4$.

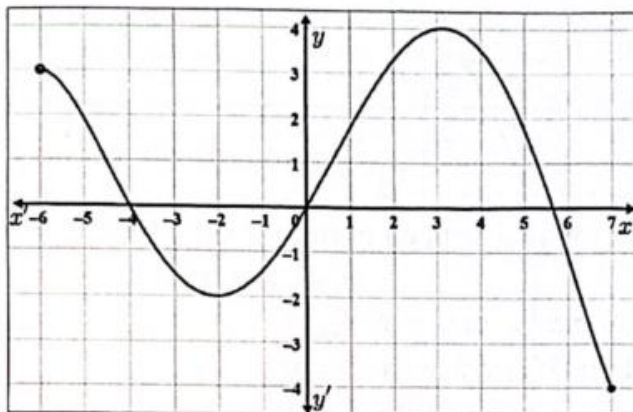
Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο A με τετμημένη 1.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι κάτω από την γραφική παράσταση της g
- Να υπολογίσετε τις τιμές του λ , ώστε το σημείο $B(\lambda - 1, 2\lambda - 7)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f



133.

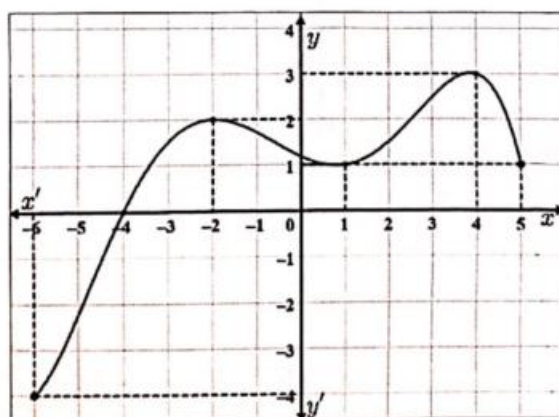
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της καθώς και το σύνολο τιμών της
- β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης
- γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων και τα ακρότατα της

134.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

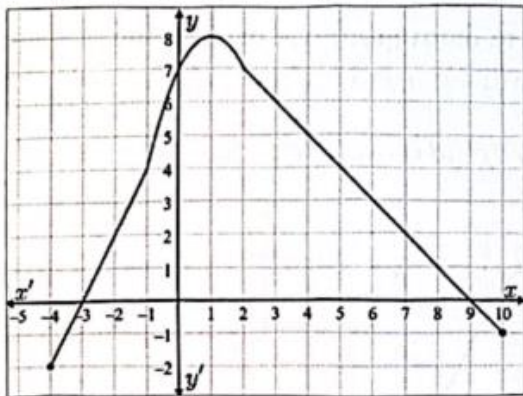


- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της καθώς και το σύνολο τιμών της
- β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης
- γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων και τα ακρότατα της



135.

Παρακάτω έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f καθώς και το σύνολο τιμών της.
- Να υπολογίσετε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
- Να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων:
i. $f(x) = 2$ ii. $f(x) = 7$
- Να υπολογίσετε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 4$

- Να δοθεί ορισμός συνάρτησης: Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η διαδικασία που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του A σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y , A : πεδίο ορισμού, y : τιμή της f στο x
- Ορισμός γραφικής παράστασης: Το σύνολο $M(x, y)$ όπου $y = f(x)$, f η συνάρτηση με πεδίο ορισμού A
- Πράξεις συναρτήσεων: $(f + g)_{(x)} = f(x) + g(x)$, $(f - g)_{(x)} = f(x) - g(x)$, $(fg)_{(x)} = f(x)g(x)$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$



Όρια $\frac{0}{0}$

136.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) - 2g(x)] \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2g(x)}{f(x)} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} [2f^2(x) - g(x)]$$

137.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} [2f(x) + 3g(x)] \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}g(x)}{f(x)} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} [8f^2(x) + g(x)]$$

138. Να υπολογίσεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$

$$-\frac{1}{3}$$

139. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-16x+14}{x-1}$

$$-12$$

140. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+6x}{x+2}$

$$-6$$

141. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-8x+15}$

$$-\frac{1}{2}$$

142. Να υπολογίσεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2-x+5}{x-1}$

$$-8$$

143. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x}-\sqrt{5}}{x-1}$

$$\frac{5}{2\sqrt{5}}$$

Σε όριο Α.Μ. $\frac{0}{0}$ έχεις 3 επιλογές

- Hornerσε αριθμητή- παρονομαστή
- Συζυγή παράσταση σε άρρητες μορφές
- De'l Hospital

Σε ριζικά με το ίδιο υπόριζο διαφορετικών τάξεων βρίσκεις το ΕΚΠ των τάξεων και θέτεις $\sqrt[n]{f(x)} = y$

Αν δίνεται όριο ποσότητας που περιέχει την $f(x)$ και ζητείται το $\lim f(x)$ τότε ΘΕΤΩ βοηθητική συνάρτηση $g(x)$.

Όριο που περιέχει απόλυτο : σε περίπτωση Α.Μ. κάνε το πινακάκι για το απόλυτο ώστε να δεις το πρόσημό του. Στην χειρότερη περίπτωση μπορεί να χρειαστείς πλευρικά όρια.

Κριτήριο παρεμβολής : Αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $\dots \leq f(x) \leq \dots$ τότε οποιοδήποτε όριο το δουλεύεις κατασκευαστικά.



144. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$

$\frac{1}{4}$

145. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

$\frac{1}{4}$

146. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x^2 - 16x}$

$\frac{1}{64}$

147. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$

$\frac{1}{24}$

148. Να υπολογίσεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

12

149. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 4x}$

$\frac{1}{4}$

150. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 1}$

$\frac{7}{2}$

151. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$

4

152. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

$\frac{1}{2}$

153. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

$\frac{3}{2}$



$$154. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

1

$$155. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - 6x + 2}$$

0

$$156. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

 $\frac{1}{4}$

$$157. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

 $-\frac{1}{56}$

$$158. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

 $-\frac{1}{3}$

$$159. \text{Να υπολογίσεις τα όρια : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{15-5x}{2x-6}$$

 $-\frac{5}{2}$

$$160. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{8x^2 - 2}$$

 $\frac{3}{4}$

$$161. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{12 - 3x^2}{4x + 8}$$

3

$$162. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$$

 $\frac{1}{2}$

$$163. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

 $\frac{1}{2\sqrt{5}}$



164. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{5x^2 + 4x^4}$

$\frac{2}{5}$

165. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2}{x^2 + 1}$

$\frac{5}{2}$

166. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x + 6}$

$-\frac{4}{3}$

167. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x + 2}$

-8

168. Να υπολογίσεις τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2x^2 + 7x + 5}$

$\frac{1}{3}$

169. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 7x - 9}$

$\frac{3}{11}$

170. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{2x - 4}$

4

171. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{16x^2 + 7x - 9}$

$-\frac{3}{25}$

172. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{2x + 4}$

-4

173. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 8x}$

$\frac{3}{8}$

174. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 8x}{x + 2x^2}$



8

175. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 3x}{2x + 2x^2}$

 $\frac{3}{2}$

176. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x}{8x^2 - 8}$

 $\frac{3}{8}$

177.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 2} -3x^2 - 4x + 6$

β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 8x + 4}{x^2 + 2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 + 1 + \sqrt{x+7}}{\sqrt{2x}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5x+3|-1}{\sin x}$

178.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x}{x+5}$

β) $\lim_{x \rightarrow -4} 3x^2 - \frac{x}{2} + 6$

γ) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} + 2x}{\sqrt{x-5} + 1}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|-2x+1|-5}{-\sqrt{x+5}}$

179.

4.9 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-1}{\eta \mu x} + \sin x - \pi$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \left| -2x^2 + \frac{\sqrt{-x+3}}{2} \right| - x$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} -2x^3 + 3x - 1$

δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2}{-x - \sqrt{2x^2 + 1}}$

180.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x - 2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x}{1 - x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 8}{x^2 - 4x}$

ε) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x + 2}{2x^2 + x}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x - 1}{x^3 + x^2}$



181.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - 10}{2 - x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{x^2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 4x}{x^2 - 2x}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 6}{3x - 3}$

στ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x - 18}{3x^2 - 9x}$

182.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 10x}{x^2 + x}$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x + 7}{x^2 + x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 9x}{4x - 12}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{5 - 5x}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x - 16}{2x^2 - 4x}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 - 2x^2}{-2x - 4}$

183.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 2x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x^2 + 4}{x^3 + x^2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 8x}{x^2 - 4}$

184.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + 2x}$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{5 - x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x - 16}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x^2 - 16x + 12}$

στ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$

185.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 2x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 - 2x + 12}{x^2 + 3x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 16}$

στ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - x}$



186.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}{x^2 - x} & \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 5x^2 - 4x - 4}{x^2 + 3x + 2} & \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 + x} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - x^2 - 8x - 4}{2x^3 + 7x^2 + 7x + 2} \end{aligned}$$

187.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} & \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 2x^2 - 3x - 2}{4x^2 - 3x - 10} & \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^3 + 8}{x^2 - 4} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^2 + 4x + 3} \end{aligned}$$

Α:3, Β:1, Γ:-3, Δ:-1

$$188. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 5x}$$

$$\frac{1}{50}$$

$$189. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{x - 2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$190. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$191. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x - 2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$192. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + 3x}$$

$$\frac{1}{13}$$

$$193. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3}$$



30

194. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{3x+3}-3}$

2

195. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

 $\frac{1}{6}$

196. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+9}-3}$

18

197. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

6

198. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

2

199. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

1

200.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{\sqrt{x}-1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{10-2x}{\sqrt{x}-1-2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-9}{\sqrt{2x+3}-3}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x-10}{4-\sqrt{5x+6}}$

A:8, B:-8, Γ:9, Δ:-8

201.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x-20}{\sqrt{x}-2}$

β) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{7x+21}{\sqrt{-x+1}-2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x-18}{\sqrt{x+3}-3}$



202.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{3x-12}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x+8}{\sqrt{x+6}-2}$

203.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+6x^2+7x+3}{\sqrt{2x+6}-2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

204.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+6x+4}{\sqrt{2x+8}-2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-2x-8}{\sqrt{x+7}-3}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-10x+3}{\sqrt{2x+3}-3}$

205.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-6x}{\sqrt{4x+1}-3}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{2\sqrt{x+3}-4}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-5x}{\sqrt{2x+9}-3}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{2x-6}-2}$

206.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-9x+10}{\sqrt{2x+5}-3}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2-3x+6}-2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2+9x-9}{\sqrt{x^2-4x+12}-3}$

207.



Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - 3} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{x^2 - x - 3} - 3} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{\sqrt{x^2 - 3x - 2}}$$

208.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 2} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{\sqrt{x^2 - 6x + 12} - 2}$$

$$209. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 7x - 8}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$210. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x^3 - 16}$$

$$211. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + x - 12}$$

$$\frac{27}{7}$$

$$212. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{2x - 4}$$

$$12$$

$$213. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{2x^2 + 8x - 10}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$214. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{2x^2 + 3x - 14}$$

$$\frac{9}{11}$$

$$215. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 7x - 9}{x^3 - 1}$$

$$\frac{11}{3}$$

$$216. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{2x^2 - 8}$$

$$\frac{1}{4}$$



217. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{8+x}}{2 - \sqrt{5-x}}$

$-\frac{2}{3}$

218. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{\sqrt{5-x} - 1}$

$-\frac{1}{3}$

219. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{8+x}}{2x - \sqrt{5-x}}$

$\frac{34}{27}$

220. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases}$, να βρεις το όριο της συνάρτησης στο 3 και στο 4

5, 6

221. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$, να βρεις: $f(1), f(2), f(3), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

0, 5, 22, 5

Να υπολογίσεις τα όρια :

222. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{x^2 - 4x}$

-2

223. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x + \sqrt{x^2 + 8}}$

$-\frac{9}{8}$

224. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9x - x^3}{x^2 - 4x + 3}$

-9

225. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - x}$

$\frac{1}{4}$

226. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1}$

0



$$227. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2 - \sqrt{x+3}}$$

$$-2$$

$$228. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$229. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{1-2x}}{x}$$

$$2$$

$$230. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{3 - \sqrt{x^2+5}}$$

$$-\frac{3}{8}$$

$$231. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{4x^2 - 12x}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$232. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{x+8}}$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$233. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{|x| + 1}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$234. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$235. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x| + x - 1}{3x - 2}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$236. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$-\frac{1}{3}$$



237. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x}$

238. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x}$

239. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

240. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - |x+1| + 1}{1-x}$

241. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$

242. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| - 2}{x - 2}$

243. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-1| - 1}{x^2 - 9}$

244. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| - x^2 + 4}{2-x}$

245. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$

246.

Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (\alpha+2)x + 2\alpha}{x^2 - 3x + 2} = 3$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^3 + (1-\alpha)x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{5}{4}$

247.

Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

α) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - (2\alpha-4)x - 8\alpha}{x^2 - 16} = -2$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - \alpha x^2 - 4x + 4\alpha}{2x^2 - 3x - 2} = \alpha - 2$

248.

Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \alpha x + \alpha - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2} = 5$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + (\alpha-3)x - 3\alpha}{\sqrt{2x^2 - 3x - 3}} = \alpha + 2$

249.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x}{x+3} + \frac{5x-3}{x^2-9} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-8}{x^2-2x} \right)$

250.



Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+4}{x+1} - \frac{8x+14}{x^2+4x+3} \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x-1} - \frac{x+11}{x^2+x-2} \right)$$

$$251. \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [2f(x) - x], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)+1}}{g(x)}$$

$$252. \text{ Αν } f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = ; , \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ;$$

$$253. \text{ Αν } f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(1), f(1+h), \frac{f(1+h) - f(1)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = ;$$

$$254. \text{ Δίνεται συνάρτηση } f(x) = x^2 + ax + b \text{ η οποία διέρχεται από τα σημεία } A(0,3) \text{ και } B(1,5), \text{ να βρεις } a, b$$

$$a = 2, b = 3$$

$$255. \text{ Δίνεται συνάρτηση } f(x) = x^2 + ax + b, \text{ να βρεις τα } a, b \text{ όταν } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$$

$$a = -3, b = 4$$

$$256. \text{ Δίνεται συνάρτηση } f(x) = \frac{x+a}{x+b}, \text{ να βρεις } a, b \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \text{ και να διέρχεται από } A(2,5)$$

$$a = -7, b = -3$$

$$257. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x^2 + ax}{x^2 + bx + 1}, a, b \in \mathbb{R}, A(1, -1), B\left(2, -\frac{4}{7}\right) \text{ τα σημεία από τα οποία διέρχεται.}$$

Να βρεις a, b .



Συνέχεια

4. Ορισμός συνέχειας στο x_0 : η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
5. Ποιες συναρτήσεις είναι συνεχείς: Πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές (ημχ, συνχ), εκθετικές και λογαριθμικές
6. Πράξη συνεχών: αν έχω δύο από τις παραπάνω συναρτήσεις συνεχείς στο x_0 τότε οποιαδήποτε πράξη τους $\left(f + g, cf, fg, \frac{f}{g}, |f|, \sqrt[n]{f}\right)$ θα είναι συνεχής στο x_0
7. Συνέχεια σε (α, β) : όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β)

258. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases}$, να εξετάσεις αν είναι συνεχής στο 4

ναι

259. Να εξετάσεις τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ στο $x=2$ και στο πεδίο ορισμού της

ναι

260. Να εξετάσεις αν είναι συνεχής: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$

όχι

261. Ομοίως: $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 3 \\ \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}, & x \neq 3 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$

262.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Ναι



263.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2 - 6x - 9}{x^2 + 4x - 21}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 3, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$

ναι

264.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8x + 15}{\sqrt{x} - 1 - 2}, & \text{αν } x \neq 5 \\ 8, & \text{αν } x = 5 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$

ναι

265.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{αν } x \neq -2 \\ 4, & \text{αν } x = -2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$

όχι

266.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 7x + 6}, & \text{αν } x \neq -1 \\ 1, & \text{αν } x = -1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$

267.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha + 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή του α , για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ $\alpha = -2$



268.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha - 4 & , \text{αν } x = 2 \\ \frac{-2x^2 + 7x - 6}{\sqrt{x+2} - 2} & , \text{αν } x \neq 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή του α , για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

 $\alpha = 0$

269. Δίνεται συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, $(x^2 - 4)f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ;$, $f(2) = ;$

270. Δίνεται συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, $xf(x) = 2f(x) + \sqrt{2x} - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ;$, $f(2) = ;$

271. Με σύρμα μήκους x φτιάχνεις τετράγωνο, να φτιάξεις τη συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδό του τετραγώνου

272. Με σύρμα μήκους x φτιάχνεις ισόπλευρο τρίγωνο, να φτιάξεις τη συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδό του τριγώνου

273.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και ισχύει ότι:

$$x^2 f(x) - 4f(x) = x^2 + 4x - 12, \text{ για κάθε } x \neq 2$$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του α , για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 2\alpha - 4$

274.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ και ισχύει ότι:

$$xf(x) = -f(x) + \sqrt{x+5} - 2, \text{ για κάθε } x \neq -1$$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

β) Να υπολογίσετε τις τιμές του α , για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = \frac{\alpha^2}{16}$



275.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + \alpha x - 1}{x^2 + x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, να υπολογίσετε την τιμή του α

Για $\alpha = 1$

- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- δ) Να υπολογίσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων $f(x)$ και $g(x) = x$

276.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,8)$ και $B(2,-7)$

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = -8$ και $\beta = -3$
- β) Να υπολογίσετε το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - x - 6}$
- δ) Να υπολογίσετε τα σημεία τομής της ευθείας $(\varepsilon) y = -6x - 2$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f



277.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 + \alpha x + \beta - 5$, με $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ και

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 3x + 6} - 2}$$

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = -7$ και $\beta = 8$
- β) Να υπολογίσετε τα σημεία τομής της συνάρτησης f με τους άξονες

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 2x - 3$

- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$
- δ) Να υπολογίσετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .



Παραγωγή συναρτήσεων

8. Παράγωγος της f στο x_0 : αν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι πραγματικός αριθμός και συμβολίζεται $f'(x_0)$
9. Ρυθμός μεταβολής της f ως προς x στο x_0 : $f'(x_0)$

Να υπολογίσεις τις παραγώγους των συναρτήσεων

278.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = -3$ β) $f(x) = \alpha$ γ) $f(x) = \sqrt{7}$ δ) $f(x) = \eta\mu\theta$

279.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^5$ β) $f(x) = x$ γ) $f(x) = x^{-3}$ δ) $f(t) = t^2$

280.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(\theta) = \theta^{-5}$ β) $f(x) = x^3$ γ) $f(x) = x^6$ δ) $f(z) = z^5$

281.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = -3x$ β) $f(x) = 4x^3$ γ) $f(x) = \frac{1}{2}x^6$

δ) $f(x) = 2\beta x^2$ ε) $f(x) = \frac{2x^3}{3}$

282.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x^5$ β) $f(x) = \sqrt{3}x^4$ γ) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

δ) $f(x) = -\lambda x^{-2}$ ε) $f(x) = \frac{3x^4}{4}$

283.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = -2\eta\mu x$ β) $f(x) = 4\sqrt{x}$ γ) $f(x) = \frac{3}{x}$

δ) $f(x) = \frac{4}{x}$ ε) $f(x) = \frac{3}{4x^4}$



284.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = -\sin x \quad \beta) f(x) = -4ax^2 \quad \gamma) f(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\delta) f(x) = -\frac{5}{x} \quad \epsilon) f(x) = \frac{2}{3x^3}$$

285.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x} \quad \beta) f(x) = -2\epsilon\phi x \quad \gamma) f(x) = \frac{5}{2}x^2$$

$$\delta) f(x) = -\frac{2}{x^2} \quad \epsilon) f(x) = 2\sqrt{x}$$

286.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^3 - \eta\mu x - 1 \quad \beta) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad \gamma) f(x) = \sqrt{x} - \sin x$$

$$\delta) f(x) = \epsilon\phi x - \eta\mu\pi \quad \epsilon) f(x) = \sin\theta - x^5 + 1$$

287.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^{-2} + \sqrt{2} - 1 \quad \beta) f(x) = x^4 - \frac{1}{x} \quad \gamma) f(\theta) = \sin\theta - \sin x$$

$$\delta) f(x) = x - \eta\mu x + 4 \quad \epsilon) f(t) = \sin x + t^2$$

288.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 4x^2 - 3x + 1 \quad \beta) f(x) = 5x^2 - 2ax - \beta \quad \gamma) f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x - 8$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{1}{x} \quad \epsilon) f(x) = \kappa x^3 - \lambda x + 3$$

289.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 3x^3 + 8x - 3 \quad \beta) f(x) = -x^2 + ax + 2 \quad \gamma) f(x) = -2x^2 + 3x - 1$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 4 \quad \epsilon) f(x) = x^3 + 2\lambda x^2 + \eta\mu x$$



290.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 6$ β) $f(x) = x^2 + κx - 9$ γ) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$

δ) $f(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 2x - 1$ ε) $f(x) = x^2 - κx + 2$

291.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$ β) $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x$ γ) $f(x) = (3x - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu x$

δ) $f(x) = (x^3 + 2) \cdot (x^4 + 6)$ ε) $f(x) = (-3x^2 + 6x) \cdot \eta\mu x$

292.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ β) $f(x) = -\frac{1}{x} - (2x^2 + 3) \cdot \eta\mu x$

γ) $f(x) = (-2x^2 + x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - 3\epsilon\phi x$ δ) $f(x) = 3x \cdot \eta\mu x + 2x$

ε) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 3x \cdot \eta\mu x$

293.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi x$ β) $f(x) = x^6 (x + 1)^3 \cdot \eta\mu x$

294.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x+2}{x}$ β) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ γ) $f(x) = \frac{x+3}{\eta\mu x}$ δ) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$

ε) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x-2}$

295.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2}$ β) $f(x) = \frac{x}{x+4}$ γ) $f(x) = \frac{2x+1}{\sigma\upsilon\nu x}$ δ) $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+2}$

ε) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$



296.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x - \eta\mu x}{x} \quad \beta) f(x) = \frac{3x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x+1} \quad \gamma) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \delta) f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$$

297. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 2$

298. $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$

299. $f(x) = (x^2+1)(2x-1)$

300. $f(x) = x^3 + \eta\mu x - 3x$

301. $f(x) = x \epsilon\phi x$

302. $f(x) = x + 2\eta\mu x$

303. $f(x) = x + 2\eta\mu 3$

304. $f(x) = \frac{x}{3}$

305. $f(x) = \frac{x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$

306. $f(x) = \frac{x^3}{x+5}$

307. $f(x) = \frac{x+4}{\sigma\upsilon\nu x}$

308. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

309. $f(x) = (x^2-1)\eta\mu x$

310. $f(x) = x - \frac{x+11}{2-x}$

311. $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$

312. $f(x) = x^2\eta\mu x$

313. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$

314. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$

315. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$

$(1)' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$(2)' = 0$	$(2x)' = 2$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$(a)' = 0$	$(ax)' = a$	$(x^v)' = vx^{v-1}$	$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Κανόνες παραγώγισης

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$



$$316. f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{1 - x}$$

$$317. f(x) = 3 + 2\eta\mu x$$

$$318. f(x) = \frac{\eta\mu x}{3}$$

$$319. f(x) = \frac{3}{x}$$

$$320. f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+1}$$

$$321. f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4x}$$

$$322. f(x) = x\eta\mu x - x + 1$$

$$323. f(x) = x^3(2 + \sqrt{x})$$

$$324. f(x) = (2x - x^3)\sqrt{x}$$

$$325. f(x) = x^2(x^3 - 3x)$$

$$326. f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$327. f(x) = \frac{x^3(x+1)}{x^2+1}$$

$$328. f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$$

$$329. f(x) = x(x^2+1)(x^2-2x)$$

$$330. f(x) = x^3 + \frac{x^2-1}{x+3}$$

$$331. f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$332. f(x) = \frac{4-x}{3+x}$$

$$333. f(x) = \frac{x}{2+\eta\mu x}$$

$$334. f(x) = \frac{x}{x+1} - x$$

$$335. f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

$$336. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$



$$337. f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{5}} + \frac{1}{x^3}$$

$$338. f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2}{4x^2 + 1}$$

$$339. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

$$340. f(x) = (4x^3 - 3x^2)(x+3)$$

$$341. f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$342. f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

$$343. f(x) = \frac{x^2}{\eta\mu x}$$

$$344. f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$345. f(x) = \frac{x^2 + 9}{5}$$

$$346. f(x) = x\eta\mu x$$

$$347. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$$348. f(x) = \frac{2x+1}{\eta\mu x}$$

$$349. f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 2$$

$$350. f(x) = \sqrt{x}\eta\mu x + \frac{x}{x-1}$$

$$351. f(x) = \frac{5}{x^2+1}$$

$$352. f(x) = x\sqrt{x}$$

$$353. f(x) = x^{\frac{2}{3}}, x > 0$$

$$354. f(x) = x^{-\frac{1}{4}}, x > 0$$

$$355. f(x) = 2x^{\frac{5}{2}}, x > 0$$

$$356. f(x) = \sqrt[3]{x}, x > 0$$

$$357. f(x) = \sqrt[3]{x^4}, x > 0$$



358. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}, x > 0$

359. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x > 0$

Το νου σας

360.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 7}{h}$

A: $3x^2 - 1$, B: 2, Γ: 11

361.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + \mu x + 5$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο

$A(2, 3)$ να υπολογίσετε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 6}{h}$

A: 3, B: 3, Γ: 6

362.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - \sqrt{2}}{h}$

A: $\frac{2}{\sqrt{6}}$, B: $\frac{-1}{\sqrt{3}}$, Γ: 0



363.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = f''(x)$

B: 2

364.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha - 2)x^2 + 2x - 5$, $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) + f''(x) = -1$

A: 0, Γ: $-1, \frac{1}{3}$

365.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) + f''(x) = -f(x)$

A: $x \neq 0$, Γ: $x = 2, x = \pm\sqrt{2}$

366.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$

B: 0

367.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{\alpha}{3}x^2 + 4x - 5$, $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

με $\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x-1} - 1}$.



α) Να δείξετε ότι $\alpha = 6$

β) Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) + f''(x) = 0$

$$A: 6, \Gamma: x = 0, x = -\frac{2}{3}$$

368.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + (\alpha - 1)x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x 'ς στο σημείο με τετμημένη 1, να δείξετε ότι $\alpha = 2$

β) Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) + f''(x) - 2}{x^2 + 4x + 3}$

$$A: 2, \Gamma: -2$$

369.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha - 3)x^2 + (2\beta - 1)x + 3, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $f'(0) = 1$ και $f''(-2) = -6$

β) Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - f''(x) - 2x}{\sqrt{x+5} - 2}$

$$B: -32$$

370.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + (\alpha - 1)x + 2}{x}, \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 6)$ να δείξετε ότι $\alpha = 4$

γ) Για $\alpha = 4$, να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

δ) Για $\alpha = 4$, να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = -1$

ε) Για $\alpha = 4$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$A: x \neq 0, \Delta: x = \pm 1, E: -1$$



371.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2\alpha - 1)x^2 - (\beta - 2)x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f' διέρχεται από το $B(1, 5)$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να υπολογίσετε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να δείξετε ότι $f'(2) - f''(2) = 2$

δ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 5$

ε) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - 1}{h}$

$$\Delta: \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6}, E: 1$$

372.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (2\alpha + 1)x - (\beta - 2)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3 να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να υπολογίσετε την $f'(x)$ και να λύσετε την ανίσωση: $f'(x) < 0$

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{f'(x) - 3}$

$$B: \left(-\infty, \frac{3}{2}\right], \Gamma: \frac{3}{2}$$

373.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

B2. Να υπολογίσετε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο

B3. Να λύσετε την εξίσωση: $f'(x) + f''(x) = -2$

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) > 0$



374.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (2\alpha + 1)x^2 - 4x + 5$

Γ1. Να υπολογίσετε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο

Γ2. Αν ισχύει: $f'(-1) - f''(2) = -1$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$

Γ3. Για $\alpha = 1$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 2x^2 + 9}{f''(x)}$

Γ4. Να υπολογίσετε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

375.

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει: $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 9$

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

Δ3. Να υπολογίσετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f' είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) + 5}{h}$



Μονοτονία ακρότατα

10. Ορισμός γνησίως αύξουσας : $f \uparrow$ στο D όταν $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$
11. Ορισμός γνησίως φθίνουσας : $f \downarrow$ στο D όταν $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$
12. Ορισμός μεγίστου , ελαχίστου : συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A : x_0 \in A$ είναι μέγιστο τότε $\forall x \in A : f(x) \leq f(x_0)$ & $x_0 \in A$ είναι ελάχιστο τότε $\forall x \in A : f(x) \geq f(x_0)$
13. f γνησίως μονότονη : μόνο γνησίως αύξουσα ή μόνο γνησίως φθίνουσα
14. Θεώρημα μονοτονίας : Αν f συνεχής στο Δ , $\bullet f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό του Δ τότε είναι γνησίως αύξουσα
 $\bullet f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό του Δ τότε είναι γνησίως φθίνουσα
15. Τοπικά ακρότατα : αν f έχει πεδίο ορισμού το A , $x_0 \in A$ είναι τοπικό μέγιστο αν υπάρχει δ ώστε $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Ομοίως για τοπικό ελάχιστο

Να υπολογίσεις τη μονοτονία και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

376. $f(x) = x^3 + 3x - 4$

☐

377. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

$\max x = -1, \min x = 1$

378. $f(x) = x^3 - 1$

☐

379. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\max x = -1, \min x = 1$

380. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

☐

381. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\max x = -1, \min x = 1$

382. $f(x) = x^2 - 8x$

$\min x = 4$

383. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 1$

$\max x = -1, \min x = 7$

384. $f(x) = x^2 - 2x$

$\min x = 1$

Μονοτονία – Ακρότατα

- Υπολογίζω $f'(x)$
- Λύνω $f'(x) = 0$
- Φτιάχνω πινακάκι για $f'(x)$



385. $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

$\max x = 1, \min x = -1$

386. $f(x) = 4x - x^2$

$\max x = 2$

387. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{3x}$

388. $f(x) = \frac{4x^2 + 21}{x - 1}$

389. $f(x) = x^2 - 3x + \sqrt{2}$

$\min x = \frac{3}{2}$

390. $f(x) = x - 2018$

$\emptyset$

391. $f(x) = -x^2 + 2x - 1, x \in (-1, 2]$

$\max x = 1, \min x = 2$

392. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$\max x = -1, \min x = 2$

393. $f(x) = \frac{x + 3}{2 - x}$

394. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$\emptyset$

395. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

$\max x = 0, \min x = 1$

396. $f(x) = x + x^3$

$\emptyset$

397. $f(x) = x(x - 3)$

$\min x = \frac{3}{2}$

398. $f(x) = 2 - 2x^3$

$\emptyset$

399. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

400. $f(x) = -3x^2 + 6$

401. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

$\max x = 0, \min x = 4$



402. $f(x) = 3x + 2$

403. $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 3, x \in [-3, 2]$

$\max x = 2, \min x = -3$

404. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$

405. $f(x) = x^4 - 4x$

$\min x = 1$

406. $f(x) = x^2(x^2 - 2), x \in [-3, 2]$

407. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$

408. $f(x) = \frac{x}{3}, x \in [-3, 6)$

409. $f(x) = \frac{x^3}{3}, x \in (-1, 5]$

410. $f(x) = (x^2 - 3)x$

411. $f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in (-1, 5]$

412. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$

413. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$

414. $f(x) = \frac{3}{x}, x \in [-3, 6)$

415. $f(x) = \frac{3x-1}{x}$

416. $f(x) = x(x^2 + x + 21)$

417. $f(x) = x^2, x \in [-3, 6)$

418. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}, x \in [-3, 2]$

419. $f(x) = x^3, x \in (-1, 5]$

420. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

421. $f(x) = \frac{4-x}{3+x}$

422. $f(x) = x(x-1) - x, x \in (-1, 5]$

423. $f(x) = \frac{3}{x+1}, x \in [-3, 6)$



424. $f(x) = (4x^3 - 3x^2)x$

425. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

426. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}, x \in [-7, 21]$

427. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

428. $f(x) = \frac{x^2 + 9}{5}, x \in [-3, 6)$

429. $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$

430. $f(x) = \frac{2x+1}{x}, x \in [-7, 21]$

431. $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$

432. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

433. $f(x) = x^3 - 12x + 1, x \in [-3, 6)$

434. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x \in [-7, 21]$

435. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

436. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}, x \in [-7, 21]$

437. $f(x) = x^3 - 12x + 1, x \in (-1, 5]$

438.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ β) $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ γ) $h(x) = x^2 - 6x + 9$

439.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = -3x^2 + 12x + 7$ β) $g(x) = 4x^2 - 8x$ γ) $h(x) = -2x^2 + 16x - 5$

440.



Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = -x^2 - 2x \quad \beta) g(x) = x^2 + 3 \quad \gamma) h(x) = -x^2 + 9$$

441.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^3 + x^2 - x + 2 \quad \beta) g(x) = x^3 - 3x^2 - 3 \quad \gamma) h(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 1$$

442.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad \beta) g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3} \quad \gamma) h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

443.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad \beta) g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2 \quad \gamma) h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

444.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 \quad \beta) g(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \quad \gamma) h(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{6}$$

445.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = x^3 - 3x + 4 \quad \beta) g(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + \frac{2}{3} \quad \gamma) h(x) = -2x^3 + x^2 - 4x$$

446.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 - 3 \quad \beta) g(x) = x^4 - 4x + 2 \quad \gamma) h(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2$$

447.



Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{1}{12} \quad \beta) g(x) = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1$$

$$\gamma) h(x) = x^4 + 4x^3 - 4$$

448.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x-1}{x+2} \quad \beta) g(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \gamma) h(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

449.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x}{x^2-x+1} \quad \beta) g(x) = \frac{x^2+1}{x} \quad \gamma) h(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

450.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad \beta) g(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x+3} \quad \gamma) h(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

451.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \beta) g(x) = \sqrt{x^2-2x+3} \quad \gamma) h(x) = 4+\sqrt{x-1}$$

452.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = 2-x+\sqrt{x-2} \quad \beta) g(x) = \sqrt{x^2+4} \quad \gamma) h(x) = \sqrt{2x^2-4x+3}$$

453.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f'

454.



Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^4 - x^3 + 1$ να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση g'

455.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x}$ να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f'

456.

16. Συνάρτηση θέσης : η συνάρτηση που καθορίζει τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t

17. Μέση ταχύτητα : $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$ στο χρονικό διάστημα (t_0, t)

18. Στιγμιαία ταχύτητα : $U(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0)$

19. Συνάρτηση $f'(x)$: αν f συνάρτηση με πεδίο ορισμού A τότε $f'(x)$ είναι μία νέα συνάρτηση όπου κάθε x αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

20. Κανόνες παραγώγισης : $(f \pm g)'_{(x_0)} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$, $(fg)'_{(x_0)} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
 $\left(\frac{f}{g}\right)'_{(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

21. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης : Αν g παραγωγίσιμη στο x_0 και f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε $(f \circ g)'_{(x_0)} = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Σύνθετη παραγωγή

Να υπολογίσεις τις παραγώγους των συναρτήσεων

457. $f(x) = \eta\mu^3 x$

458. $f(x) = (x^2 + 1)^3$

459. $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$

460. $f(x) = \eta\mu 3x$

461. $f(x) = \sqrt{x+2}$

462. $f(x) = \eta\mu(x^2 - 5x + 1)$

463. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$

464. $f(x) = (6 - 5x)^{10}$

$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$(f(x))^v = v(f(x))^{v-1} \cdot f'(x)$	$(\epsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)$
$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$	$(\sigma\phi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} f'(x)$



465. $f(x) = \sqrt{(3x+3)}$

466. $f(x) = \sqrt{x+1}$

467. $f(x) = \sqrt{x+3x^2}$

468. $f(x) = \eta\mu(x+1)$

469. $f(x) = \eta\mu(x^2+1)$

470. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

471. $f(x) = \sqrt{3\alpha}$

472. $f(x) = \eta\mu(x^2+2)$

473. $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu 3x$

474. $f(x) = \varepsilon\varphi 2x$

475. $f(x) = x\eta\mu 3x$

476. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

477. $f(x) = \eta\mu^2 x$

478. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$

479. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

480. $f(x) = (x^2-1)^3$

481. $f(x) = \eta\mu^3 x$

482. $f(x) = \sqrt{\varepsilon\varphi x}$

483. $f(x) = \sigma\upsilon\nu e^x$

484. $f(x) = \alpha^3 + \eta\mu 3x$

485. $f(x) = (x^3+x)^3$

486. $f(x) = \eta\mu^5(x)$

487. $f(x) = \sqrt{\eta\mu 2x}$

488. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x)$

489. $f(x) = \eta\mu(\eta\mu 5x)$

490. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

491. $f(x) = (3x+5)^6$

492. $f(x) = \eta\mu\sqrt{x}$

493. $f(x) = \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x$



494. $f(x) = (x^2 + 2)^{10}$

495. $f(x) = \sin(\eta\mu x)$

496. $f(x) = (x^2 + 1)^{21}$

497. $f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{x}$

498.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu 3x$ β) $f(x) = (2x - 3)^5$ γ) $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x}$ δ) $f(x) = \sin x^3$
ε) $f(x) = \eta\mu(3x^2 - 1)$

499.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sin(2x - 1)$ β) $f(x) = (-x^3 + 2x)^6$ γ) $f(x) = \sqrt{x^3 + \eta\mu x}$
δ) $f(x) = \eta\mu^2 3x$ ε) $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$

500.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \varepsilon\phi(3x - 2)$ β) $f(x) = (x^3 - 2)^4$ γ) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
δ) $f(x) = \sin^3 2x$ ε) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

501.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (4x^2 - 2x)^{17}$ β) $f(x) = \sqrt{3x + \eta\mu 3x}$ γ) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sin 2x}$
δ) $f(x) = \sin^2 3x$ ε) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3} \cdot (x - 1)^2$

502.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (-2x^3 + 3)^{21}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sin 4x}$ γ) $f(x) = \frac{2x^2}{\eta\mu(3x + 1)}$
δ) $f(x) = \eta\mu^2(-2x + 1)$ ε) $f(x) = \sqrt{x + 2} \cdot (3x - 2)^3$

503.

Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x^3 + \eta\mu x$ β) $f(x) = -4x^3 - 5x^2 - 7x + \alpha$ γ) $f(x) = -3x^2 \cdot \sin x$
δ) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x}$

504.



Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 4x^2 + 3x - \sin x$ β) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 8x - 4$ γ) $f(x) = -3x \cdot \eta\mu x$

δ) $f(x) = \frac{5x-2}{3x}$

505.

Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x}$ β) $f(x) = 2x^3 - x^2 - x - 2$ γ) $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x$

δ) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$

Να βρεις μονοτονία και ακρότατα

506. $f(x) = \sqrt{3x+1} + 2$

507. $f(x) = (x-2)^2$

508. $f(x) = (x^2 - 9)^3$

509. $f(x) = (x-1)^3$

510. $f(x) = (x-2)^4$

511. $f(x) = (x^2 - 2x)^3$

512. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

513. $f(x) = x\sqrt{2x}$

514. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

515. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$

516. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

517. $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

518. $f(x) = x\sqrt{x-1}$

519. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Να βρεις πεδίο ορισμού και μονοτονία, ακρότατα

520. $f(x) = -x^3 + 3x$

521. $g(x) = -4x + 4$

522. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

523. $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2013$

524. $g(x) = \sqrt{3 - 3x^2}$

525. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$



526. $h(x) = \sqrt{8x - x^2}$

Να βρεις παραγώγους των συναρτήσεων :

527. $f(x) = \eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu 2x$

528. $f(x) = x^2 - \eta\mu x 3x$

529. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

530. $f(x) = x^2 \sqrt{2x}$

531. $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

532. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

533. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x \eta\mu 2x$

Να βρείς μονοτονία ,ακρότατα (πρώτα πεδίο ορισμού)

534. $f(x) = -x^3 + 3x$

535. $h(x) = x^2 - 6x + 9$

536. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2013$

537. $g(x) = (x-1)^{20}$

538. $h(x) = (1-x)^{21}$

539. $f(x) = (x - x^2)^2$

540. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

541. $h(x) = (3-6x)^5$



Μορφή εφαπτόμενης (ε)

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0)$$

- $x_0 =$
- $y_0 = f(x_0)$
- $\lambda = f'(x_0)$

Εφαπτόμενη συνάρτησης

Θυμίζω : τετμημένη $\rightarrow x, x_0$ τεταγμένη $\rightarrow y, y_0$ (ε) διέρχεται από : x, y (ε) στο : x_0, y_0 (ε) // $xx' \rightarrow \lambda = 0$ (ε) // $y = 3x - 2 \rightarrow \lambda = 3$ (ε) $\perp y = 3x - 2 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ (ε) σχηματίζει γωνία ω με xx'
 $\rightarrow \lambda = \tan(\omega)$

542. Δίνεται $f(x) = ax^2$, να βρεις το a ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης στο σημείο με τετμημένη 2 να είναι 4

543. Δίνεται $f(x) = x^2 + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 0

$$y = 1$$

544. Δίνεται $f(x) = x^4 + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 1

$$y = 4x - 2$$

545. Δίνεται $f(x) = 3x^2 - 5x$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 2

$$y = 7x - 12$$

546. Δίνεται $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 1

$$y = \frac{1}{4}x + 2$$

547. Δίνεται $f(x) = x^2 - 3x$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 0

$$y = -3x$$



548.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x}$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(-2, f(-2))$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο που η συνάρτηση τέμνει τον άξονα $x'x$.

549.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη 5.

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

550.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + x - 2$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου α , έτσι ώστε ο συντελεστής της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ να είναι 7.

$$\alpha = 0$$

551.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-\alpha}{x}$. Να υπολογίσετε την τιμή του α , έτσι ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη 1 να είναι -2 .

$$\alpha = -2$$

552.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\alpha^2 x - 2$. Να υπολογίσετε τις τιμές του α , έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 2$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης 0.



553.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη 1.

554.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^3 - 2x - 1)^4$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη -1.

$$\omega = 0$$

555.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 2$.

135

556.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - ax + 2$. Να υπολογίσετε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $B(-1, f(-1))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

557.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x + 1} + ax$. Να υπολογίσετε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

558. Δίνεται $f(x) = \eta \mu x$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 0

$$y = 0$$

559. Δίνεται $f(x) = \sqrt{x} + 3$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 4

$$y = \frac{1}{4}x + 4$$

560. Δίνεται $f(x) = (x^2 + 1)x$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη -1

561. Δίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 2



562. Δίνεται $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 3

563. Δίνεται $f(x) = x^2 + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη 5

$$y = \pm 4x - 3$$

564. Δίνεται $f(x) = x^2 + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη 1

$$y = 1$$

565. Δίνεται $f(x) = x^3 + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη 1

$$y = 1$$

566. Δίνεται $f(x) = x^3 + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη 9

567. Δίνεται $f(x) = x^2 - 4x$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη -4

568. Δίνεται $f(x) = \sqrt{x}$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη 2

569. Δίνεται $f(x) = 2x^3 - 5$, να βρεις την εφαπτόμενη στο σημείο με τεταγμένη 11

570. Δίνεται $f(x) = x^2 - 5x + 6$, να βρεις την εφαπτόμενη που είναι // στον οριζόντιο άξονα

$$y = -\frac{1}{4}$$

571. Δίνεται $f(x) = x^2 + 4x$, να βρεις την εφαπτόμενη που είναι // στον οριζόντιο άξονα

$$y = -4$$

572. Δίνεται $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$, να βρεις την εφαπτόμενη που είναι // στον οριζόντιο άξονα

573. Δίνεται $f(x) = x^3 - 3x + 6$, να βρεις την εφαπτόμενη που είναι // στον οριζόντιο άξονα

574. Δίνεται $f(x) = \eta\mu x$, να βρεις την εφαπτόμενη που είναι // στον οριζόντιο άξονα

575. Δίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$, να βρεις την εφαπτόμενη που είναι // στον οριζόντιο άξονα

576. Δίνεται $f(x) = 2x^2 - ax$, να βρεις το a ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη 2 να σχηματίζει 45 με οριζόντιο άξονα

577. Να βρεις τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της $f(x) = 2x^2 + x - 3$, xx' στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{4}$

$$\epsilon\phi\omega = 2$$

578. Να βρεις τα σημεία όπου οι εφαπτομένες της $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ // xx'

579. Δίνεται $f(x) = (x+1)^2$, να βρεις το λ των εφαπτομένων στα σημεία με τεταγμένη 16



580. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x + 1$, να βρεις την εφαπτόμενη που σχηματίζει 135 με οριζ. άξονα

581. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ που είναι $// y = 3x + 1$

$$y = 3x + 1$$

582. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ που είναι $// y = 4x + 1$

$$y = 4x + 2$$

583. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -2x^2 + 11x + 1$ που είναι $// y = -x + 1$

$$y = -x + 19$$

584. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ που είναι $// y = -24x + 1$

$$x_0 = \pm 3$$

585. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ που είναι $\perp 2x - 4y + 3 = 0$

$$y = -2x + \frac{29}{4}$$

586. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ που είναι $\perp x - y + 3 = 0$

587. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = x^2 + x + 1$ που είναι $\perp 2x - 6y + 3 = 0$

588. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ που είναι $\perp 2x + 4y + 3 = 0$

589. Να βρεις την εφαπτόμενη της $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ που είναι $\perp 2x + 6y + 3 = 0$

590. Να βρεις τα α, β ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = \frac{1}{2x}$, να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο

σημείο με τετμημένη $x=1$

$$a = -\frac{5}{2}, b = 2$$

591. Να εξετάσεις αν η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι εφαπτόμενη της $f(x) = x^3$

592.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 4x^2 - x + 5$ στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

593.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{2-x}{x+2}, x \neq -2$ στο σημείο $A(0, f(0))$.



594.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{2}{x}, x \neq 0$ στο σημείο $K(-1, f(-1))$.

595.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (-x+2)^4$ στο σημείο $M(1, f(1))$.

596.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, -2)$, να υπολογίσετε

- Τον πραγματικό αριθμό α .
- Την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $K(3, f(3))$.

597.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\lambda = -1$.

$$y = -x$$

598.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\lambda = 5$.

599.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-3}{x}, x \neq 0$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\lambda = 3$.

600.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (2x+1)^2$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\lambda = 12$.



601.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

602.

Να βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

603.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (\alpha - 2)x^2 + x - 1$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$, να υπολογίσετε:

- α) τον πραγματικό αριθμό α .
- β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

604.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 2$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x - 5$.

$$y = 3x - 2$$

605.

Να υπολογίσετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + x - 2$ οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $-2y = 4x + 5$.

$$x_0 = \pm 1$$



606.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, η οποία διέρχεται από το σημείο

$A(2, 6)$ να υπολογίσετε

- το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- τον πραγματικό αριθμό a .
- τις εξισώσεις των εφαπτομένων που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -x + 6$.

607.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης η οποία σχηματίζει γωνία $\omega = 45^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

608.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ η οποία σχηματίζει γωνία $\omega = 135^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

609.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^2 - 5x + 1$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon: y = \frac{x}{3} - 5$.

610.

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (-x + 3)^2$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = \frac{x}{4} + 6$.

$$x_0 = 1$$

611.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $A(1, f'(1))$.



$$y=8x-7$$

612.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (-x + \alpha)^3 + 1$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,9)$ να υπολογίσετε:

- τον πραγματικό αριθμό α .
- την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' στο σημείο $B(1, f'(1))$.

613.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 3\alpha x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

- αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό α .
- για $\alpha = -1$, να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $B(-1, f'(-1))$.

614.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6}$

- να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$.
- να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- να υπολογίσετε την παραπάνω εφαπτομένη.



615.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - \alpha x + 1$ με $\alpha, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(2) = 8$

- α) να βρείτε την $f'(x)$ και να υπολογίσετε την τιμή του α .
- β) για $\alpha = 4$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.
- γ) για $\alpha = 4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

616.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$, όπου x πραγματικός αριθμός

- α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f(x)}{x^2 - 4}$.
- γ) να αποδείξετε ότι $x^2 \cdot f'(x) + 1 = x^2 - 1$.
- δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

617.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x^2 + \alpha x + 3$ και $g(x) = x^2 + x + 3\alpha - 1$ $\alpha \in \mathbb{R}$ οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$

- α) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α .
- β) για $\alpha = 2$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
- γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1}$.
- δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g η οποία είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.



618.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(-1, 5)$

α) να δείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 0$.

β) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x+5}-3}$.

γ) να βρείτε τα διαστήματα τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ) να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.

619.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

α) να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f'(x)}$.

γ) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $A(0, f'(0))$.

620.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ και $g(x) = \frac{3x + \alpha}{\sqrt{x - 2} - 3}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

γ) να υπολογίσετε την τιμή του α αν γνωρίζουμε ότι $f(4) = 2g(3)$.

δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.



621.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + \alpha x - 2}{x+1}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική

παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$

- α) να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α .
- γ) για $\alpha = 3$, να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2}$.
- ε) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

622.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο $f(x) = x^2 + 2x - 3$ και $g(x) = x - 1$

- α) να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης h , όπου $h(x) = (f \cdot g)(x)$.
- β) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$.
- γ) να βρείτε τα διαστήματα τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = -4x + 1$.



Συνδυαστικά θέματα

623. Δίνεται συνάρτηση συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, όπου $f(1), f(3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης :

$$3x^2 + 2x - 5 = 0, \text{ να βρεις}$$

- $f(1), f(3)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

624. Δίνεται συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όπου $f(1), f(2), f(3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης : $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, να βρεις

- $f(1), f(2), f(3)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

625. Να βρεις το ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
- $f(x) = x^2 \eta \mu 2x$
- $f(x) = \sqrt{2x} \cdot x^2$

626. Να βρεις τα α, β ώστε η συνάρτηση να διέρχεται από το $A(1,2)$ και να έχει ρυθμό μεταβολής στο $x=1$ με τιμή 5 όταν $f(x) = x^2 + ax + b$.

$$a=3, b=-2$$

627. Να βρεις μονοτονία και ακρότατα της $f(x) = 12 + 3x - x^3$.

$$x = \pm 1$$

628. Να βρεις μονοτονία και ακρότατα της $f'(x)$ όταν $f(x) = 12 + 3x - x^3$

$$x=0, \max$$

629. Να βρεις το ρυθμό του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης : $f(x) = x^2(3x+5)$

$$18x+10$$

630. Αν $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow a, b, c = ?$, όταν η συνάρτηση διέρχεται από το $A(-1,2)$, έχει ελάχιστο στο $x=2$ και έχει ρυθμό μεταβολής στο $x=1$ ίσο με 3

$$a = -\frac{3}{2}, b = 6, c = \frac{19}{2}$$

631. Να βρεις μονοτονία και ακρότατα του ρυθμού μεταβολής της $f(x) = x^2 \sqrt{x+1}$

632. Να βρεις τα ακρότατα της $f''(x): f(x) = x^4 - 12x^3$

$$x=3, \min$$

633. Αν $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$

- Ν.δ.ο. $x^2 f''(x) = 2f(x)$.
- Να βρεις α, β όταν $f(2) = 2, f'(2) = 3$



$$a = \frac{2}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

634. Αν $f(x) = \eta\mu(ax+b) \Rightarrow f''(x) + a^2 f(x) = 0$

635. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$

636. Αν $f(x) = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow f^3(x)f''(x) + 1 = 0$

637.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x όταν:

- α) $x = 2$
- β) $x = -1$
- γ) $x = \pi$

638.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

- α) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = -3$.
- β) Να υπολογίσετε τις τιμές του x για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής f ως προς x είναι ίσος με 7.

639.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f' ως προς x όταν:

- α) $x = 1$.
- β) $x = 0$.

640.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + ax^2 - x + 4$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , για $x = 1$ είναι 6, να υπολογίσετε:

- α) Τον πραγματικό αριθμό a .
- β) Τον ρυθμό μεταβολής της f' ως προς x , για $x = 2$.

641.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$. Να υπολογίσετε:

- α) Για ποιες τιμές του x , ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$, ως προς x είναι ίσος με 0.
- β) Για ποια τιμή του x , ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$, ως προς x είναι ίσος με 6.
- γ) Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f'(x)$ στο σημείο που ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$, ως προς x είναι ίσος με 2.



642.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , για

$$x=3 \text{ είναι ίσος με } \frac{-3\sqrt{5}}{5}.$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{5}}{x - 3}$.

643.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολή της απόστασης των σημείων $A(x, 0)$ και $B(2, 1)$, ως προς x για $x = 1$.

644.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(-1, 3)$ και $B(2, x)$, ως προς x για $x = 2$.

645.

Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του Εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς x , ως προς x όταν $x = 9$.

646.

Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του όγκου V ενός κύβου πλευράς x , ως προς x όταν $x = 2$.

647.

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 60 cm και με μήκος μιας πλευράς ίσο με $x \text{ cm}$

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου $E(x)$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 4 \text{ cm}$.

648.

Σε ένα σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία

$$A(0, x+1) \text{ και } B(x^2 + x, 0) \text{ με } x > 0.$$

Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x , όταν $x = 3$.



649.

Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου, ακμής 2m προσθέτουμε λάδι.

Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του λαδιού ως συνάρτησης του χρόνου

$$t \text{ (σε min)}, \text{ είναι } h(t) = \frac{t^2}{8}$$

α) Να υπολογίσετε το ύψος της στάθμης του λαδιού τα δυο πρώτα λεπτά.

β) Να δείξετε ότι ο όγκος του λαδιού της δεξαμενής, μετά από χρόνο

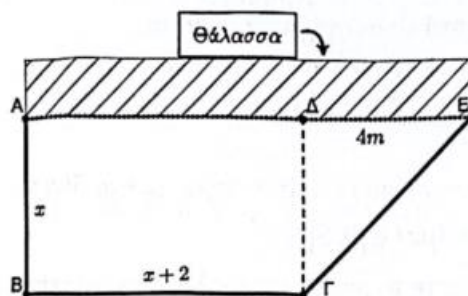
$$t \text{ (min)} \text{ δίνεται από τον τύπο: } V(t) = \frac{t^2}{2} \text{ m}^3.$$

γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου, τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ min}$.

δ) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

650.

Έχουμε ένα παραθαλάσσιο οικοπέδο ABΓΕ, το οποίο αποτελείται από 2 τμήματα. Το πρώτο ABΓΔ έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και το δεύτερο ΓΔΕ έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = x^2 + 4x, \quad x > 0$$

β) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του οικοπέδου για $x = 2$.

γ) Να δείξετε ότι η περίφραξη του οικοπέδου δίνεται από τον τύπο:

$$\Pi(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2x + 2$$



Προβλήματα

651. Δίνεται τετράγωνο πλευράς χ .

- Να βρεις την περίμετρο και το εμβαδό του.
- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου και του εμβαδού όταν η πλευρά είναι 3

4,6

652. Δίνεται κύβος πλευράς χ .

- Να βρεις εμβαδό και όγκο.
- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και του όγκου όταν το $\chi=3$

36,27

653. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τετράγωνη βάση πλευράς χ και ύψος 2χ .

- Να βρεις το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
- Να βρεις το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και του όγκου όταν $\chi=3$

96,54

654. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 100 να βρεις εκείνο με το μέγιστο εμβαδό

$x = y = 25$

655. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 64 να βρεις εκείνο με την ελάχιστη περίφραξη

$x = y = 8$

656. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδό 25, ποιο είναι εκείνο που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα

$x = y = \sqrt{50}$

657. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο με εμβαδό 10000 τετραγωνικά μέτρα, να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει την ελάχιστη περίφραξη

$x = y = 100$

658. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο με περίφραξη 240 μέτρα, να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

$x = y = 60$

659. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο όπου η μία του πλευρά εφάπτεται σε τοίχο. Αν για την περίφραξή του χρειάστηκες 300 μέτρα σύρμα, να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

$x = 75, y = 150$

660. Δίνεται ορθογώνιο οικόπεδο όπου η μία του πλευρά εφάπτεται σε τοίχο. Αν το εμβαδόν του είναι 400 τ.μ., να βρεις τις διαστάσεις του ώστε να χρειάζεται το λιγότερο δυνατό σύρμα για την περίφραξή του.

661. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 100 και μέγιστο γινόμενο.

$x = 50, y = 50$

662. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 100 και το γινόμενό τους ενός με το διπλάσιο του άλλου να γίνεται μέγιστο.

$x = 50, y = 50$





663. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με άθροισμα 150 και το γινόμενο του ενός με το τετράγωνο του άλλου να γίνεται μέγιστο .

$$x = 100, y = 50$$

664. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 400 και το άθροισμά τους να γίνεται ελάχιστο .

$$x = y = 20$$

665.

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο: $x(t) = t^3 - 6t^2 + 6t + 3$, όπου t σε sec και x σε m

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος για κάθε χρονική στιγμή t .
- β) Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα του σώματος και καθώς αυτή που θα έχει μετά από τρία δευτερόλεπτα.
- γ) Ποιες χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο ;
- δ) Ποια χρονική στιγμή το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και ποια χρονική στιγμή προς την αρνητική;
- ε) Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ sec}$;
- στ) Να υπολογίσετε το διάστημα που διένυσε το σώμα τα πρώτα τέσσερα δευτερόλεπτα.

666.

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο: $x(t) = t^2 + 4t$, όπου t σε sec και x σε m

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t .
- β) Ποια η ταχύτητα του κινητού σε χρόνο 0 sec και ποια σε χρόνο 4 sec ;
- γ) Πότε το κινητό είναι στιγμιαία ακίνητο;
- δ) Πότε το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;



667.

Η θέση ενός κινητού που κινείται σε μια ευθεία δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = t^3 - 12t + 8 \text{ με } t \in [0, 6]$$

- α) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του διαστήματος τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ sec}$.
- β) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του είναι 15 m/sec .
- γ) Να βρείτε πότε κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- δ) Να βρείτε την επιτάχυνση που έχει το κινητό τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ sec}$.
- ε) Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των πρώτων 3 sec .

668.

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει

$$\text{του χρόνου } t \text{ από τον τύπο: } x(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t + 3 \text{ όπου } t \text{ σε sec και } x$$

σε m

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t .
- β) Ποια η ταχύτητα του κινητού σε χρόνο $t = 3 \text{ sec}$ και $t = 4 \text{ sec}$.
- γ) Πότε το κινητό είναι στιγμιαία ακίνητο ;
- δ) Πότε το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- ε) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση που έχει το κινητό τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ sec}$.



669.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + \alpha x - 4$ με $\alpha, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(-1) = -5.$$

B1. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $f(x)$ ως προς x (μον.3) και να υπολογίσετε την τιμή του α (μον.3).

Μονάδες 6

B2. Για $\alpha = 1$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2x - 2}{x^2 - x}$$

Μονάδες 6

B3. Για $\alpha = 1$, να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 7

B4. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B αντίστοιχα.

Μονάδες 6

670.

Θέμα Γ

Μια κατασκευαστική εταιρεία, κατασκευάζει τσιμεντένια μπλοκ για την υποστήριξη ενός έργου, σχήματος κύβου ακμής 3m. Σε μια άδεια δεξαμενή προσθέτουμε τσιμέντο. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του τσιμέντου ως

συνάρτηση του χρόνου (t σε min) δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = \frac{t^2 - 2t + 3}{6}$

Γ1. Να υπολογίσετε το ύψος της στάθμης του τσιμέντου τη χρονική στιγμή $t = 2$ min.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι ο όγκος του τσιμέντου της δεξαμενής μετά από χρόνο

$$t \text{ min δίνεται από τον τύπο } V(t) = \frac{3t^2 - 6t + 9}{2}.$$

Μονάδες 6



Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του τσιμέντου τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ min.}$

Μονάδες 7

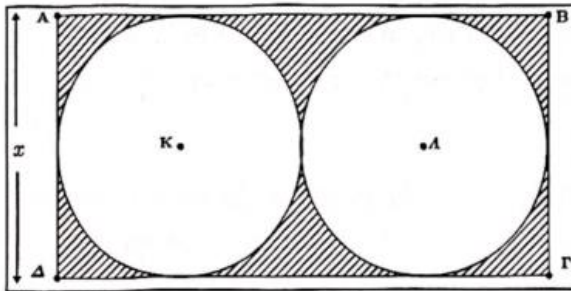
Γ4. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο η δεξαμενή θα γεμίσει.

Μονάδες 7

671.

Θέμα Δ

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με δυο ίσους κύκλους εγγεγραμμένους μέσα στο ορθογώνιο



Δ1. Να βρείτε την πλευρά ΑΒ συναρτήσει του x .

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = \frac{4-\pi}{2} \cdot x^2$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως προς x όταν $x = 3 \text{ cm.}$

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε για ποια τιμή της ακτίνας r ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x είναι $8 - 2\pi$.

Μονάδες 7

672. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 100 και το άθροισμα τους ενός με το 3πλάσιο του άλλου να γίνεται ελάχιστο.

$$x = 10\sqrt{3}, y = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

673. Να βρεις δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 100 και το άθροισμα του 2πλασίου του ενός με το τριπλάσιο του άλλου να γίνεται ελάχιστο.

$$x = \sqrt{150}, y = \frac{2}{3}\sqrt{150}$$

674. Ένα ορθογώνιο φύλλο με εμβαδό 600, έχει περιθώρια πάνω κάτω 4 ενώ δεξιά και αριστερά 3. Να βρεις τις διαστάσεις του φύλλου ώστε η ωφέλιμη επιφάνεια να γίνεται μέγιστη

$$x = 15\sqrt{2}, y = 20\sqrt{2}$$



675. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει περίμετρο 10 και χ μία οξεία του γωνία .

- Ν.δ.ο. η υποτείνουσα $a = \frac{10}{1 + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}$.
- Να βρεις το χ ώστε η υποτείνουσα να γίνεται ελάχιστη

$$\frac{\pi}{4}$$

676. Στο “Troufel” ένα ταψί γαλακτοπούρεκο κοστίζει : $\chi - 20$ ευρώ . Από την πώληση χ ταψιών γαλακτοπούρεκων οι εισπράξεις είναι : $500 + 80\chi - \chi^2$ ευρώ . Να βρεις πόσα ταψιά γαλακτοπούρεκου θα πρέπει να παρασκευάζει για να έχει το ζαχαροπλαστείο τα μέγιστα κέρδη . Να γίνει ανάλυση των παρακάτω στοιχείων : Τιμή πώλησης ενός ταψιού , συνολικά έσοδα , τιμή κόστους ενός ταψιού , συνολικά έξοδα και κέρδη .

$$\chi_{\max} = 25, 75, 1875, 5, 125, 175$$

677. Η «Κάβουρας ΕΠΕ» εισάγει είδη επιπλοποιίας . Αν η τιμή πώλησης ενός πάγκου κουζίνας είναι $100 - \chi$ ευρώ και το κόστος εισαγωγής χ πάγκων είναι $500 - 20\chi + \chi^2$ ευρώ . Να βρεις πόσους πάγκους θα πρέπει να παραγγείλει τον επόμενο μήνα για να έχει η «Κάβουρας ΕΠΕ» τα μέγιστα κέρδη . Να γίνει ανάλυση των παρακάτω στοιχείων : Πόσα χρήματα θα πρέπει να στείλει η «Κάβουρας ΕΠΕ» στον προμηθευτή πάγκων , ποια θα είναι τα έξοδα , τα έσοδα και τα κέρδη της ΕΠΕ και ποια η τιμή πώλησης ενός πάγκου .

678. Κυλινδρικό δοχείο ανοικτό από πάνω έχει χωρητικότητα 216 . Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του να χρειαστεί για την κατασκευή του ελάχιστο υλικό

$$r = u = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$$



Εφαρμογή Fermat και ορισμού

679. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + ax + 2020$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0 \Rightarrow a =$;

$a = 4$

680. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + ax + 2020$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Rightarrow a =$;

$a = -4$

681. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + ax + 2020$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \Rightarrow a =$;

$a = 0$

682. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 2020$, να βρεις 1^η , 2^η , 3^η και 4^η παράγωγο της συνάρτησης

683. Αν $f(x) = ax + \frac{b}{x} + 4$, να βρεις τα a, b ώστε να έχει μέγιστο στο $x = -1$ με τιμή 2

$a = 1, b = 1$

684. Αν $f(x) = ax^2 - x + 2b$, να βρεις τα a, b αν η συνάρτηση έχει στο $x = -\frac{1}{2}$ τοπικό μέγιστο με τιμή $\frac{5}{4}$

$a = -1, b = -\frac{1}{8}$

685. Αν $f(x) = x^2 + ax + b$, να βρεις τα a, b ώστε να έχει ακρότατο στο $x = 3$ και να διέρχεται από το $A(0, 2)$

$a = -6, b = 2$

686. Αν $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \eta \mu 3x$, να βρεις το a ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατο στο $x = \pi/3$

687. Να βρεις πολυώνυμο 3° βαθμού με $P''(0) = 2, P(1) = 4, P'(1) = 5, P(0) = 2$

$P(x) = x^3 + x^2 + 2$

688. Να βρεις πολυώνυμο 3° βαθμού με $P''(3) = 0, P(3) = 21, P'(1) = 0, P(1) = 3$

689. Να βρεις τα a, b για να έχει ακρότατο στο $A(2, -1)$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$

$a = -4, b = 3$

690. Να βρεις τα a, b ώστε $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3ax + 2b}$, $f(1) = 2, f'(1) = 3$.

691. Να βρεις το a ώστε $f(x) = x^2 + ax$, να έχει ακρότατο στο $x = 2$.

692. Να βρεις τα a, b ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, να έχει τ.μ. στο $x = 3$ με τιμή 6.

693. Να βρεις τα a, b ώστε $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, να έχει τ.ε. στο $x = -1$ με τιμή 13.

$a = 1, b = 1$

694. Να βρεις τα a, b ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(1) = 2, f'(1) = 3$.



$$a=1, b=0$$

695.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Μονάδες 2

β) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 1$,

Μονάδες 3

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα,

Μονάδες 10

δ) τα ακρότατα της συνάρτησης f ,

Μονάδες 5

ε) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 5

696.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

I. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

II. Αν $a = -4$,

α) να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.

Μονάδες 5

β) να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Μονάδες 10

γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5



697.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{R}$.

A) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3,8)$, να βρείτε τον k .

Μονάδες 5

B) Για $k=-1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

698.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 5

β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7



699.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 - 3x + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι η παράγωγος $f'(x)$ έχει ολικό μέγιστο και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x}$

Μονάδες 6

700.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

B1. Να υπολογίσετε το γ , αν είναι γνωστό ότι

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} + 6 - 3}$$

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα σημεία με τετμημένες 1 και $\frac{1}{3}$ είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

B3. Για $\alpha=2$, $\beta=1$ και $\gamma=36$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10



701.

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα χελιδόνι πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο t (sec) από τον τύπο:

$$h(t) = 3t^2 - 6t + 5, \quad 0 \leq t \leq 5$$

Να βρείτε :

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόνι βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$,
Μονάδες 6

β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h , ως προς t , τη χρονική στιγμή $t = 2$,
Μονάδες 7

γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό;
Μονάδες 12

702.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$, της $f(x)$.
Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $x f''(x) - f'(x) = 4$.
Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
Μονάδες 7

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.
Μονάδες 7



703.

ΘΕΜΑ Γ

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μία περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t)=t-4\sqrt{t}+a$, όπου $a\in\mathbb{R}$ και $t\in(0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Γ1. Να αποδείξετε ότι για $t\in(0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t\in(4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή του a αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C .

Μονάδες 6

Γ3. Για $a=3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C .

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{t\rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2-16}$

Μονάδες 7

704.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+ax-7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, \quad x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι $a=9$

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$

Μονάδες 10



705.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

706.

ΘΕΜΑ ΓΔίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 8

707.

ΘΕΜΑ 3^οΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Αν $f(1) = 0$ και $f(2) = 5$, να βρείτε τα α και β .

Μονάδες 10

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα (β) να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10



708.

ΘΕΜΑ 4^ο

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x.$$

Μονάδες 5

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

709.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο: $f'(x) = x^2 - 2x$.

- α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

Μονάδες 4

- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

- γ) Να βρείτε την $f''(x)$.

Μονάδες 6

- δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;

Μονάδες 4

- ε) Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5



710.

ΘΕΜΑ 4ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

- α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);

Μονάδες 5

- β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

Μονάδες 8

- γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

Μονάδες 7

- δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

Μονάδες 5

711.

ΘΕΜΑ 4ο

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}x(50-x), \quad 0 < x < 50.$$

Μονάδες 8

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Μονάδες 5



712.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + kx + \lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι $k = -2$ και $\lambda = 1$.

Μονάδες 12

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f'(x) + f''(x) > 0.$$

Μονάδες 8

713.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ .

Μονάδες 13

β. Για $k = 2$ και $\lambda = 3$,

i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

Μονάδες 6

714.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = x^2 - 3x + \lambda$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ .

Μονάδες 10

Για $\lambda = 2$,

Δ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και το είδος των ακροτάτων,

Μονάδες 7

Δ3. να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές της συνάρτησης για $x_1 = \frac{6}{5}$ και $x_2 = \frac{3}{2}$, καθώς επίσης και οι τιμές της συνάρτησης για $x_3 = 4$ και $x_4 = 6$.

Μονάδες 8



715.

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .

Μονάδες 8

Δ2. Για $a=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $a=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

716.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 9



717.

ΘΕΜΑ ΓΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

718.

ΘΕΜΑ ΓΔίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Μονάδες 10



719.

ΘΕΜΑ ΔΔίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

720.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.

Μονάδες 4

Γ2. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)}.$$

Μονάδες 7



721.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

B2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

B3. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Μονάδες 7

B4. Για $\alpha = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

722.

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5\text{m}$ και $x_B = 34,2\text{m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5



723.

ΘΕΜΑ ΓΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

724.

ΘΕΜΑ ΓΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - kx + 2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5

Γ2. Για $k=3$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 10

Γ3. Για $k=3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 10



725.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - ax + 2,$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- Γ1.** Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Μονάδες 6

- Γ2.** Για $a = -1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

- Γ3.** Για $a = -1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- Γ4.** Για $a = -1$ να δείξετε ότι:

$$f(2019) + f(2020) > 2 \cdot f(1)$$

Μονάδες 5

726.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax + 6$ με $a, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(4) = 12$.

- B1.** Να βρείτε την $f'(x)$ (μον. 3) και να υπολογίσετε την τιμή του a (μον. 3).

Μονάδες 6

- B2.** Για $a=4$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της (μον. 5) και να βρείτε τα ακρότατά της (μον. 3).

Μονάδες 8

- B3.** Για $a=4$ να δείξετε ότι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

- B4.** Για $a=4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7



727.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 6

- Γ2.** Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 6

- Γ3.** Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

- Γ4.** Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

728.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 6x + 3$, όπου x, α πραγματικοί αριθμοί.

- B1.** Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι ίσος με 14, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 8

- B2.** Για $\alpha = 2$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f''(x) + 14}{x^2 - 9}$$

Μονάδες 7

- B3.** Για $\alpha = 2$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - 16x$, με x πραγματικός αριθμός, ως προς τη μονοτονία (μον.8) και να βρείτε τα ακρότατα (μον.2).

Μονάδες 10



729.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το α .

Μονάδες 6

B3. Για $\alpha = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Μονάδες 9

B4. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Μονάδες 6

730.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

Μονάδες 4

731. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$.

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 2, \gamma = 1$$

732. Να βρείτε τα α, β ώστε $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{\beta x}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = 3$.

733. Να βρείτε τα α, β ώστε $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$.

$$\alpha = 12, \beta = 4$$

734. Να βρείτε το α ώστε $f(x) = x^2 + \alpha x$, να έχει ακρότατο στο $x=3$.

$$\alpha = -6$$



735. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, να έχει τ.μ. στο $x=1$ με τιμή 5.

$$a = -2, b = 7$$

736. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, να έχει τ.ε. στο $x=2$ με τιμή 3.

$$a = -2, b = -2$$

737. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = 3x^2 + 2ax + 5b$, $f(0) = 20$, $f'(1) = 3$.

$$a = -\frac{3}{2}, b = 4$$

738. Να βρείς τα a, b, c ώστε $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 3$.

$$a = \frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$$

739. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = \frac{x^2 + a}{bx}$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$.

$$a = -4, b = 0 \text{ \& } a = -\frac{28}{13}, b = \frac{4}{13}$$

740. Συμπλήρωσε τον πίνακα :

f έχει τ.ε. στο $x=5$		
f έχει τ.μ. στο $x=-3$		
f έχει ακρότατο στο $x=20$		
f έχει τ.ε. στο $x=3$ με τιμή 13		
f έχει τ.μ. στο $x=-2$ με τιμή 23		
f έχει ακρότατο στο $x=-5$ με τιμή 33		

741. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = x^2 + ax + b$, να έχει τ.μ. στο $x=1$ με τιμή 5.

$$a = -2, b = 6$$

742. Να βρείς τα a, b ώστε $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, να έχει τ.ε. στο $x=2$ με τιμή 3.

$$a = -2, b = -2$$

743. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}$, να μελετήσεις τη συνάρτηση ως προς :

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Να βρεις την εφαπτόμενη της συνάρτησης που είναι παράλληλη σε οριζόντιο άξονα
- Να συγκρίνεις $f(2020)$, $f(2021)$

744. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^4 + 4x + 2021$, να μελετήσεις τη συνάρτηση ως προς :

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Να βρεις την εφαπτόμενη της συνάρτησης που είναι παράλληλη στη διχοτόμο $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου



- Να συγκρίνεις $f(a^2 + 1), f(a^2 - 1)$
- Ν.δ.ο. $x^4 + 4x + 3 \geq 0$

745.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

- Να υπολογίσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστο ή ελάχιστο
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

746.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζουν ακρότατα. Να προσδιορίσετε τα είδη των ακροτάτων και να τα υπολογίσετε
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

747.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζουν ακρότατα. Να προσδιορίσετε τα είδη των ακροτάτων και να τα υπολογίσετε
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

748.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3-x}{3+x}$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x > -3$
- Αν $x \in [1, 3]$, να αποδείξετε ότι: $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

749.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x < 2$
- Αν $x \in [-3, 1]$, να αποδείξετε ότι: $-2 \leq f(x) \leq 2$

750.



Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- β) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζουν ακρότατα. Να προσδιορίσετε τα είδη των ακροτάτων και να τα υπολογίσετε
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- δ) Αν $x \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$, να αποδείξετε ότι: $2 \leq f(x) \leq 3$

751.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 2)^2$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- β) Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{5})$ και $f(\sqrt{2})$

752.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- β) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζουν ακρότατα. Να προσδιορίσετε τα είδη των ακροτάτων και να τα υπολογίσετε
- γ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{1}{3}\right)$ και $f\left(\frac{3}{4}\right)$

753.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^3 + (\alpha - 2)x^2 + 9x + \beta - 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, -2)$, τότε:

- α) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β
- β) Για $\alpha = -4$ και $\beta = -1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- γ) Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f
- δ) Να συγκρίνετε τις τιμές: $f(-1)$ και $f(0)$



754.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x}$$

Αν η συνάρτηση f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1 και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ τότε:

- Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β
- Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- Να βρείτε τις θέσεις το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f

755.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2$$

Αν η συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1)$ και η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = -2$ τότε:

- Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β
- Για $\alpha = \beta = 4$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της

756.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η

γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

- Να βρείτε τις τιμές των κ και λ
- Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 3$, να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f

757.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 3$ ακρότατο το -5



758.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ ακρότατο το -4

759.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = x^2 - x + \kappa$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

- α) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό κ
- β) Για $\kappa = -2$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και το είδος των ακροτάτων

760.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3\alpha - 1$$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα
- β) Εάν το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f είναι τριπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να υπολογίσετε τον αριθμό α .

761.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + \alpha^2 + 1$$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα
- β) Εάν το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f είναι διπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α .



762.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 3x^2 - \alpha x + 4$

- α) Να υπολογίσετε το $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 - x}$
- β) Για $\alpha = 9$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της
- γ) Για $\alpha = 9$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$
- δ) Για $\alpha = 9$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$

763.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 2}{x^2 - 1}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = -3x + 2022$

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$
- β) Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της

764.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 1$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με

τετμημένη 1 και επιπλέον ισχύει ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f' στο σημείο της $A(0, f'(0))$

- δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x) + f'(x) - 3}{x^2 - 1}$



765.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$. Να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $f(x)$ γίνεται μέγιστος.

766.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + kx^2 + k - 6$, $k \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $k = 6$.

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $f(x)$ γίνεται ελάχιστος

767.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 9x + 13$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1 , να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$

β) Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $g(x) = x^3 + f'(x)$ γίνεται ελάχιστος.

768.

Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x - \frac{1}{3},$$

η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

769.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β , αν γνωρίζετε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
- $f'(-1) = 12$

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της

γ) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.



770.

Ένας μετεωρολογικός σταθμός άρχισε να μετράει τη θερμοκρασία σε μια περιοχή της Δυτικής Ελλάδος για πρώτη φορά όταν $t = 1$. Η θερμοκρασία ως συνάρτηση του χρόνου t δίνεται από τον τύπο:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}t \cdot (8-t) - 2, t \in [1, 10]$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες και $\theta(t)$ η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου.

- Να υπολογίσετε ποια ήταν η θερμοκρασία που μέτρησε ο μετεωρολογικός σταθμός την δεύτερη ημέρα.
- Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η θερμοκρασία της περιοχής ήταν η μέγιστη
- Ποία ήταν η μέγιστη θερμοκρασία ;
- Ποιες ημέρες η θερμοκρασία αυξάνεται και ποιες ημέρες η θερμοκρασία μειώνεται;

771.

Ένα σώμα βάλλεται επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 18t - 3t^2, t \in [0, 5]$$

όπου t είναι ο χρόνος σε sec και h το διάστημα που διανύει το σώμα σε (m)

- Να υπολογίσετε το διάστημα στο οποίο το σώμα ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα στο οποίο το σώμα κατεβαίνει.
- Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος.
- Ποιο είναι το μέγιστο ύψος ;
- Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

772.

Κάναμε ένα test drive σε ένα καινούργιο αμάξι μιας αυτοκινητοβιομηχανίας. Ο κινητήρας καταναλώνει σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα, όταν λειτουργεί σε x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 14 \quad x \in [0, 6].$$

- Να υπολογίσετε πότε η κατανάλωση αυξάνεται και πότε μειώνεται



- β) Να υπολογίσετε την τιμή των στροφών που πρέπει να έχει ο κινητήρας για να έχουμε την μικρότερη κατανάλωση και πόση είναι η κατανάλωση τότε.
- γ) Το ρυθμό κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x = 5$
- δ) Να υπολογίσετε πότε ο ρυθμός κατανάλωσης του αυτοκινήτου γίνεται ελάχιστος.

773.

Μια ομάδα βιολόγων κάνει ένα πείραμα και παρατηρεί ότι ο αριθμός των μικροοργανισμών που παράγεται ημερησίως σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$K(\theta) = -2\theta^2 + 60\theta + 100, \theta \in [5, 40]$$

όπου θ είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και K ο αριθμός των μικροοργανισμών

- α) Να υπολογίσετε πόσοι μικροοργανισμοί θα υπάρξουν, αν η θερμοκρασία είναι 20°C
- β) Να υπολογίσετε την θερμοκρασία καθώς και τον μέγιστο αριθμό των μικροοργανισμών που μπορούν να παραχθούν σε μια ημέρα.
- γ) Να υπολογίσετε ποια πρέπει να είναι η θερμοκρασία έτσι ώστε να υπάρξουν 300 μικροοργανισμοί.

774.

Το 2020 κυκλοφόρησε μια καινούργια παιχνιδομηχανή σε ολόκληρο τον κόσμο. Λόγω της έλλειψης σε απόθεμα τσιπ για την κατασκευή της παιχνιδομηχανής, ο αριθμός κατασκευής τους δίνεται από τη συνάρτηση

$$N(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 10, t \in [1, 10]$$

όπου t είναι ο χρόνος σε μήνες και N ο αριθμός των παιχνιδομηχανών που κατασκευάστηκαν σε χιλιάδες.

- α) Να υπολογίσετε πόσες παιχνιδομηχανές κατασκευάστηκαν τον 1^ο μήνα
- β) Να υπολογίσετε ποιόν μήνα η παιχνιδομηχανή είχε τον μικρότερο αριθμό κατασκευών και πόσες κατασκευάστηκαν;
- γ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κατασκευής των παιχνιδομηχανών τον 5^ο μήνα.
- δ) Να συγκρίνετε το πλήθος των παιχνιδομηχανών που κατασκευάστηκαν τον 3^ο μήνα σε σχέση με τον 9^ο μήνα



775.

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει πάνελ ήχου σχήματος ορθογωνίου με πλευρές μήκους x, y και περίμετρο σταθερή 16 cm

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E της επιφάνειας κάθε πάνελ δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο:

$$E(x) = 8x - x^2, 0 < x < 8$$

- β) Να υπολογίσετε για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του Εμβαδού

776.

Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 4 m προσθέτουμε κρασί. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του κρασιού, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min) δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{t^2 - t + 4}{4}$$

- α) Να υπολογίσετε το ύψος της στάθμης του κρασιού τη χρονική στιγμή $t = 2\text{ min}$

- β) Να δείξετε ότι ο όγκος του κρασιού της δεξαμενής μετά από χρόνο $t\text{ min}$ δίνεται από τον τύπο: $V(t) = 4t^2 - 4t + 16\text{ m}^3$

- γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του κρασιού τη χρονική στιγμή $t = 3\text{ min}$

- δ) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή

777.

Ένα οικόπεδο, έχει σχήμα ορθογώνιο, με διαστάσεις x και y έχει εμβαδόν 400 m^2

- α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του οικοπέδου δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}, x > 0$$

- β) Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε το οικόπεδο να έχει ελάχιστη περίμετρο, την οποία και να υπολογίσετε.

- γ) Για την τιμή του x , που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το κόστος περιφράξης του οικοπέδου αν στοιχίζει 5 € το μέτρο.



778.

Μια βιομηχανία κατασκευάζει αντλίες θερμότητας. Το ημερήσιο κόστος σε δεκάδες ευρώ για την κατασκευή x αντλιών δίνεται από τον τύπο:

$$K(x) = -x^2 + 20x + 40, x \in [0, 40]$$

Ενώ τα έσοδα που έχει η βιομηχανία από την πώληση x αντλιών δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = \frac{x^3}{3} - 10x^2 - 20x + 90, x \in [0, 40]$$

- Να υπολογίσετε το ημερήσιο κόστος της βιομηχανίας αν δεν παραχθεί καμία αντλία θερμότητας
- Να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή που έχει το κόστος παραγωγής
- Να υπολογίσετε τον αριθμό των αντλιών θερμότητας που πρέπει να πουλήσει η βιομηχανία για να έχει το ελάχιστο κέρδος

779.

Ένα μικρό συνεργείο έχει την δυνατότητα να κατασκευάζει κάθε έτος 30 μηχανές συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x μηχανών δίνεται από την συνάρτηση

$$K(x) = 2x^2 + 6$$

και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) από τη συνάρτηση

$$E(x) = x^2 + 18x$$

- Να υπολογίσετε το κόστος κατασκευής 3 μηχανών καθώς και το κόστος αν δεν κατασκευαστεί καμία μηχανή
- Να βρείτε τον τύπο $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους του συνεργείου
- Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους
- Πόσες μηχανές πρέπει να κατασκευάσει το συνεργείο για να έχει το μέγιστο κέρδος και ποιο είναι αυτό.

780.

Ο κύριος Γιώργος έχει ένα κατάστημα που επισκευάζει ταμειακές μηχανές στην Πρέβεζα. Το ημερήσιο κόστος του καταστήματος δίνεται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 4x - 3x^2, x \in [0, 15]$$



τα έσοδα από την επισκευή των ταμειακών μηχανών δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = -\frac{x^3}{3} + 20x, x \in [0, 15]$$

- α) Να βρείτε τη τον τύπο $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους που έχει το κατάστημα
 β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους
 γ) Πόσες ταμειακές μηχανές πρέπει να επισκευάσει ο κύριος Γιώργος ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος και ποιο είναι;

781.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

B1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{x^3 - 1}$

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι $x^2 \cdot f'(x) = -3 + x^2$

Μονάδες 5

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της

Μονάδες 8

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$

Μονάδες 6



782.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \kappa x^2 - x + 5$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4}$

Μονάδες 6

Γ2. Για $\kappa = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της

Μονάδες 8

Γ3. Για $\kappa = 1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{2}{5}\right)$ και $f\left(\frac{3}{7}\right)$

Μονάδες 5

Γ4. Για $\kappa = 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, f(1))$

Μονάδες 6

783.

Θέμα Δ

Ο αριθμός των επισκεπτών που ανεβαίνουν για να θαυμάσουν το μνημείο του Ζαλόγγου μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = t^3 - 3t^2 - 24t + 110, \quad t > 0$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής των επισκεπτών

Μονάδες 4

Δ2. Ποια χρονική στιγμή ο αριθμός των επισκεπτών γίνεται ελάχιστος;

Μονάδες 9

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(t) \geq 30$

Μονάδες 6

Δ4. Ποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των επισκεπτών γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 6



Αποδείξεις θεωρίας

Να βρεις την παράγωγο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$, και για $h \neq 0$, οπότε $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$, άρα

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0. \text{ Άρα } (c)' = 0.$$

Να βρεις την παράγωγο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \text{ Άρα } (x)' = 1.$$

Να βρεις την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$,

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$. Επομένως, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$.

Να βρεις την παράγωγο της συνάρτησης $cf(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x)), \text{ και για } h \neq 0$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x). \text{ Άρα } (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$



Να βρεις την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) + g(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε $F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))$

$$= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)), \text{ και για } h \neq 0,$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \text{ Επομένως}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

www.kglykos.gr

