



Σειρές Fourier

Έστω μία συνάρτηση ορισμένη και ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$, **συντελεστές Fourier** καλούνται οι αριθμοί :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(vx) dx$$

$$b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(vx) dx$$

ενώ **σειρά Fourier** καλείται η τριγωνομετρική σειρά με τύπο $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos(vx) + b_v \sin(vx)$

Περιοδική επέκταση συνάρτησης καλείται μία νέα συνάρτηση $\Phi(x)$ με περίοδο $T = 2\pi$, πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ όπου $\Phi(x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Συνθήκες (ικανές συνθήκες Dirichlet για να μετατραπεί σε Fourier) :

1^η : Η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier της $f(x)$ είναι συγκλίνουσα

2^η : Το άθροισμα της σειράς σε κάθε σημείο όπου είναι συνεχής ισούται με $f(x)$

Σειρά Fourier συναρτήσεων περιόδου $2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos\left(\frac{v\pi x}{l}\right) + b_v \sin\left(\frac{v\pi x}{l}\right) \text{ με}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_v = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{v\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_v = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{v\pi x}{l}\right) dx$$

Ιδιότητα (ταυτότητα Parseval) : $\frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 + b_v^2$



Σειρά Fourier άρτιας συνάρτησης στο $[-l, l]$

Συνημιτονική σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos\left(\frac{v\pi x}{l}\right) + b_v \sin\left(\frac{v\pi x}{l}\right) \text{ με}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_v = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{v\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_v = 0$$

Σειρά Fourier περιττής συνάρτησης στο $[-l, l]$

Ημιτονική σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos\left(\frac{v\pi x}{l}\right) + b_v \sin\left(\frac{v\pi x}{l}\right) \text{ με}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_v = 0$$

$$b_v = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{v\pi x}{l}\right) dx$$

Κάθε σειρά Fourier μπορεί να πάρει τη μορφή $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} A_v \cos\left(\frac{v\pi x}{l} - \varphi_v\right)$ όπου

$$A_v = \sqrt{a_v^2 + b_v^2}$$

$$\tan(\varphi_v) = \frac{b_v}{a_v}$$

Εκθετική ή μιγαδική μορφή της σειράς Fourier με απλή αντικατάσταση των τύπων του Euler

$$\cos\left(\frac{v\pi x}{l}\right) = \frac{e^{\frac{v\pi x}{l}} + e^{-\frac{v\pi x}{l}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{v\pi x}{l}\right) = \frac{e^{\frac{v\pi x}{l}} - e^{-\frac{v\pi x}{l}}}{2i}$$



1. Να αναπτυχθεί κατά σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x$, για $x \in [-\pi, \pi]$.

Λύση

Η δοθείσα συνάρτηση $f(x) = x$, ικανοποιεί προφανώς τις συνθήκες του θεωρήματος Dirichlet και επομένως μπορεί να αναπτυχθεί κατά σειρά Fourier. Επειδή εξάλλου είναι περιττή, (αφού $f(-x) = -x = -f(x)$), άρα οι συντελεστές της $\alpha_v = 0$, $\forall v \in \mathbb{N}$, ενώ κατά την (14*), θα έχουμε:

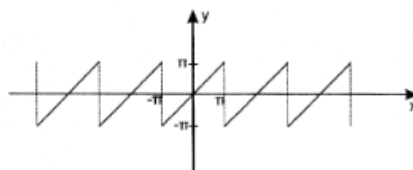
$$\begin{aligned}\beta_v &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(vx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(vx) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{v} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(vx) d(vx) = \frac{-2}{v\pi} \int_0^{\pi} x \cdot d(\cos(vx)) = \\ &= \frac{-2}{v\pi} \left[x \cdot \cos(vx) - \int \cos(vx) dx \right]_0^{\pi} = \frac{-2}{v\pi} \left[x \cdot \cos(vx) - \frac{1}{v} \sin(vx) \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{-2}{v\pi} \left[\pi \cdot \cos(v\pi) - 0 \cdot \cos(v \cdot 0) \right] = \frac{-2}{v} \cos(v\pi) = (-1)^{v+1} \frac{2}{v}.\end{aligned}$$

Άρα η σειρά Fourier της $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, είναι:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \cdot \cos(vx) + \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \cdot \sin(vx) \Leftrightarrow \\ x &= \beta_1 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \sin(2x) + \beta_3 \cdot \sin(3x) + \beta_4 \cdot \sin(4x) + \dots + \beta_v \cdot \sin(vx) = \\ &= (-1)^2 \frac{2}{1} \sin x + (-1)^3 \frac{2}{2} \sin(2x) + (-1)^4 \frac{2}{3} \sin(3x) + (-1)^5 \frac{2}{4} \sin(4x) + \dots = \\ &= 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots + (-1)^{v-1} \frac{\sin(vx)}{v} + \dots \right).\end{aligned}$$

Αυτή η ισότητα επαληθεύεται $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Το γράφημα της είναι:



Σχήμα 3.3.1.

(Στα σημεία $x = \pm\pi$, το άθροισμα της σειράς Fourier, δεν ταυτίζεται με τις τιμές της συνάρτησης $f(x) = x$, αλλά σύμφωνα με το θεώρημα Dirichlet,

$$\text{παίρνει τιμή: } \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Εκτός δε του διαστήματος $[-\pi, \pi]$, το άθροισμα της σειράς είναι η περιοδική επέκταση της $f(x) = x$, όπως φαίνεται και στο παραπάνω γράφημα).



2α. Να αναπτυχθεί κατά σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x^2$, για $x \in [-\pi, \pi]$ και να γίνει το γράφημά της.

Λύση

Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, διαπιστώνουμε και εδώ πως η $f(x) = x^2$, ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Dirichlet άρα μπορεί να αναπτυχθεί κατά Fourier. Ότι επίσης είναι άρτια, αφού $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, άρα κατά τον (13*), θα είναι:

$\beta_v = 0$ και

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \text{ ενώ } \alpha_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(vx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(vx)}{v} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{v} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(vx) dx = (-1)^v \cdot \frac{4}{v^2}.$$

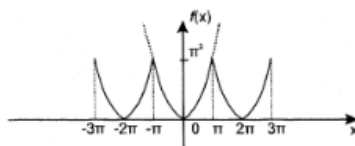
Άρα, η σειρά Fourier της $f(x) = x^2$ είναι της μορφής:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right).$$

(Η παραπάνω ισότητα ισχύει $\forall x \in [-\pi, \pi]$, αφού στα άκρα $x = \pm\pi$, το άθροισμα της σειράς ταυτίζεται με τις τιμές της $f(x) = x^2$. Πράγματι,

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2 = f(\pi) = f(-\pi).$$

Τέλος το γράφημα της $f(x) = x^2$ και του αθροίσματος της σειράς κατά Fourier είναι:





2β. Όμοια να αναλυθεί σε σειρά Fourier η ίδια συνάρτηση $f(x) = x^2$, όταν όμως $x \in (-2, 2)$:

Λύση

Προφανώς και εδώ, (παρότι $x \in (-2, 2)$ δηλαδή η f ορίζεται σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και δεν είναι περιοδική), θεωρούμε την περιοδική επέκταση της f σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή την $\Phi(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και με περίοδο $T=4$.

Επίσης η $\Phi(x)$ προφανώς είναι άρτια, με $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Άρα:

$$\beta_v = 0 \text{ και } \alpha_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3},$$

$$\alpha_v = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Phi(x) \cdot \cos(v\omega x) dx = \int_0^2 x^2 \cdot \cos\left(\frac{v\pi x}{2}\right) dx = \dots =$$

$$= \frac{16}{v^2 \pi^2} \cos(v\pi) = \begin{cases} \frac{16}{v^2 \pi^2}, & \text{αν } v = 2\kappa \\ -\frac{16}{v^2 \pi^2}, & \text{αν } v = 2\kappa + 1 \end{cases}, \quad (\kappa \in \mathbb{N}^*)$$

Άρα:

$$x^2 = \frac{8}{3 \cdot 2} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{16}{v^2 \pi^2} \cos(v\pi) \cdot \cos\left(\frac{v\pi x}{2}\right) =$$

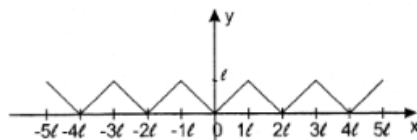
$$= \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \dots \right]$$



3. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=|x|$, σε σειρά Fourier περιόδου 2ℓ , στο διάστημα $[-\ell, \ell]$ και να δοθεί το γράφημά της.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=|x|$, έχει προφανώς το παρακάτω γράφημα και είναι άρτια.



Σχήμα 3.3.3.

Άρα, $\beta_v = 0$, ενώ

$$\alpha_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\ell} = \ell \quad \text{και}$$

$$\alpha_v = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \cdot \cos \frac{v\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \left[\frac{\ell \cdot x \cdot \sin \frac{v\pi x}{\ell}}{v\pi} - \frac{\ell}{v\pi} \int \sin \frac{v\pi x}{\ell} dx \right]_0^{\ell} =$$

$$= \frac{2\ell}{v^2 \pi^2} \cos \frac{v\pi x}{\ell} \Big|_0^{\ell} =$$

$$= \frac{2\ell}{v^2 \pi^2} [(-1)^v - 1] = \begin{cases} 0, & \text{αν } v = \text{άρτιος} \\ -\frac{4\ell}{v^2 \pi^2}, & \text{αν } v = \text{περιττός} \end{cases}$$

Άρα η σειρά Fourier της $f(x)=|x|$, θα είναι της μορφής:

$$|x| = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi x}{\ell}\right) + \dots \right].$$

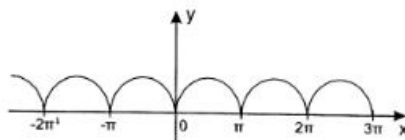
Η παραπάνω ισότητα ισχύει $\forall x \in [-\ell, \ell]$, άρα η σειρά συγκλίνει σε όλο το $\mathbb{R}$ και το άθροισμά της είναι η συνάρτηση όπως φαίνεται στο παραπάνω γράφημα εκτός του $[-\ell, \ell]$.



4. Να αναλυθεί σε σειρά Fourier, η μη ημιτονοειδής συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x|$, $x \in \mathbb{R}$, (καθώς και η $f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, $x \in \mathbb{R}$).

Λύση

Διαπιστώνουμε πως έχει περίοδο $T = \pi$ και ότι είναι άρτια.



Σχήμα 3.3.4.

$$\text{Άρα, } \beta_v = 0 \text{ και } \alpha_0 = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\alpha_v = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos(vx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(v+1)x + \sin(v-1)x] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((v+1)x) + \sin((v-1)x)] dx = \begin{cases} 0, & \text{όταν } v = \text{περιττός} \\ -\frac{4\sigma\upsilon\nu(vx)}{\pi(v^2-1)}, & \text{όταν } v = \text{άρτιος} \end{cases}$$

$$\text{Οπότε: } f(x) = |\sin x| = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} [\alpha_v \cdot \cos(vx)] =$$

$$\frac{2}{\pi} + \left[-\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2^2-1} \cos(2x) + \frac{1}{2^4-1} \cos(4x) + \frac{1}{2^6-1} \cos(6x) + \dots \right) \right], \quad (I)$$

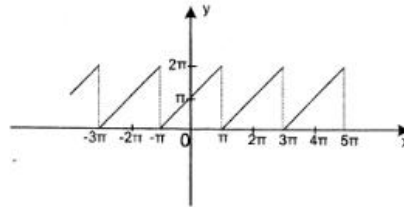
(Επίσης, επειδή $|\cos x| = |\sin(x - \pi/2)|$, παίρνουμε

$$|\cos x| \stackrel{(I)}{=} \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \dots \right)$$



5. Να αναλυθεί κατά σειρά Fourier, η $f(x) = \pi + x$, $x \in [-\pi, \pi]$, και να δοθεί το γράφημά της.

Λύση



Σχήμα 3.3.5.

Το γράφημα της $f(x)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(-\pi, 0)$ και $(\pi, 2\pi)$. Η επέκταση του γραφήματος εκτός του διαστήματος $[-\pi, \pi]$, είναι το άθροισμα της σειράς Fourier της $f(x)$, δηλαδή η περιοδική επέκτασή της, έστω $\Phi(x)$, που στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ ταυτίζεται, όπως έχουμε αναφέρει ήδη, με την $f(x)$.

Κατά τους γνωστούς τύπους, οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} + 0 = 2\pi,$$

$$\alpha_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(vx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cdot \cos(vx) dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(vx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(vx) dx = \dots = 0 + 0 = 0$$

Επίσης,

$$\beta_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(vx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cdot \sin(vx) dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(vx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(vx) dx = \dots = 0 + \left[-\frac{2x}{v\pi} \cdot \cos(vx) + \frac{2}{\pi v^2} \cdot \sin(vx) \right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{v} (-1)^v = (-1)^{v+1} \cdot \frac{2}{v}.$$

Άρα το ανάπτυγμα της $f(x) = \pi + x$, σε σειρά Fourier είναι:

$$f(x) = \pi + x = \pi + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \cdot \sin(vx) =$$

$$= \pi + 2 \left(\sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$$



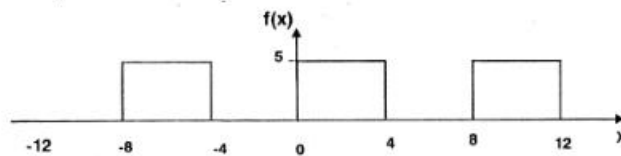
6. Να αναλυθεί κατά Fourier, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-4, 0) \\ 5, & x \in (0, 4) \end{cases}$,

με περίοδο $T = 8$. Επίσης, να οριστεί η $f(x)$ στα σημεία $x = 0$, $x = -4$, $x = 4$, (δηλαδή στα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$), έτσι ώστε η σειρά Fourier να συγκλίνει στην $f(x)$ για $x \in [-4, 4]$.

Λύση

Επειδή $T = 2\ell = 8$, άρα $\ell = 4$. Οπότε θα έχουμε:

$$\alpha_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 \cos\left(\frac{0\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{4} \int_0^4 1 dx = 1,$$



Σχήμα 3.3.6.

$$\alpha_v = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \cos\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{4} \left[\int_{-4}^0 0 \cdot \cos\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx + \int_0^4 5 \cdot \cos\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \int_0^4 \cos\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx = \frac{5}{4} \left(\frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi x}{4}\right) \right) \Big|_0^4 = 0, \text{ και τέλος}$$

$$\beta_v = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \sin\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{4} \left[\int_{-4}^0 0 \cdot \sin\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx + \int_0^4 5 \cdot \sin\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \int_0^4 \sin\left(\frac{v\pi x}{4}\right) dx = \frac{5}{4} \left(-\frac{4}{v\pi} \cdot \cos\left(\frac{v\pi x}{4}\right) \right) \Big|_0^4 = \frac{5(1 - \cos(v\pi))}{v\pi}.$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{5(1 - \cos(v\pi))}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi x}{4}\right) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{4} + \dots \right)$$

Εξάλλου, επειδή η $f(x)$ πληροί τις συνθήκες Dirichlet, η σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(x)$ σε όλα τα σημεία συνέχειας, ενώ συγκλίνει κατά το κριτήριο Dirichlet στην $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ στα σημεία ασυνέχειας x_0 . Άρα, για τα σημεία ασυνέχειας, $x_0 = 0$, $x_0 = -4$, $x_0 = 4$, η σειρά συγκλίνει στο $\frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$. Έτσι για να συγκλίνει η $f(x)$, $\forall x \in [-4, 4]$, θα πρέπει να οριστεί πάλι, από τις σχέσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 5/2, & x = -4 \\ 0, & -4 < x < 0 \\ 5/2, & x = 0 \\ 5, & 0 < x < 4 \\ 5/2, & x = 4 \end{cases}$$

www.kglykos.gr



χαλαρά μόνο
τον Αύγουστο